

TEORÍA DE TRANSPORTE ÓPTIMO (Notas de clase)

Julián Fernández Bonder

(2do cuatrimestre 2026)



Instituto de Cálculo, FCEN-CONICET
Departamento de Matemática, FCEN-UBA
Ciudad Universitaria, Pabellón $0+\infty$ (1428),
Buenos Aires, Argentina.

Correo: `jfbonder@dm.uba.ar`

URL: `https://sites.google.com/view/jfbonder/`

Índice general

Capítulo 1. Introducción	7
1.1. El problema de Monge	7
1.2. El problema de Monge en espacios de medida	9
1.3. La relajación de Kantorovich	11
1.4. Una interpretación probabilística del problema de Kantorovich	15
1.5. El caso discreto	16
Ejercicios	18
Capítulo 2. Existencia de planes óptimos	21
2.1. El método directo del cálculo de variaciones	21
2.2. La topología débil	22
2.3. Demostración de la existencia de planes óptimos	24
Ejercicios	31
Capítulo 3. Un breve repaso de dualidad en Programación Lineal	35
3.1. El problema primal y el problema dual	35
3.2. Dualidad débil y dualidad fuerte	36
3.3. Una ventaja del problema dual: reducción de la dimensión	37
3.4. Vuelta al problema de Kantorovich: el caso discreto	38
Ejercicios	40
Capítulo 4. Dualidad	43
4.1. Dualidad de Kantorovich	43
4.2. Una demostración formal	46
4.3. El problema del transportista	49
4.4. Demostración del teorema de dualidad	49
Ejercicios	54
Capítulo 5. Potenciales de Kantorovich en el caso discreto	57
5.1. El problema de transporte discreto	57
5.2. Existencia de potenciales óptimos	58
5.3. Potenciales y planes óptimos	58
Ejercicios	60
Capítulo 6. Potenciales de Kantorovich	63
6.1. La c -transformada	63
6.2. Existencia de potenciales de Kantorovich	68
6.3. Soporte de los planes óptimos	71
6.4. El costo cuadrático y la transformada de Legendre	73
Ejercicios	77

Capítulo 7. Algunas interpretaciones y extensiones	81
7.1. Interpretación probabilística revisitada	81
7.2. Una primera mirada a la factorización polar	82
7.3. Interpretación económica: problemas de matching	83
7.4. Transporte multimarginal	84
7.5. Transporte óptimo y discretización	85
Ejercicios	86
Capítulo 8. Transporte óptimo en dimensión uno	89
8.1. Función de distribución y pseudoinversa	89
8.2. El mapa de transporte monótono	92
8.3. c -monotonidad cíclica	95
8.4. Optimalidad del mapa monótono	97
Ejercicios	100
Capítulo 9. El teorema de factorización polar de Brenier	103
9.1. El teorema de Brenier	103
9.2. El caso gaussiano	108
9.3. La interpolación de McCann	109
9.4. El teorema de Gangbo–McCann	110
Ejercicios	111
Capítulo 10. Distancias de Wasserstein	115
10.1. Definición y primeros ejemplos	115
10.2. W_p es una distancia	117
10.3. Convergencia en W_p	118
10.4. Completitud y separabilidad	121
10.5. Geodésicas	123
10.6. La dualidad de Kantorovich–Rubinstein	124
Ejercicios	126
Capítulo 11. La desigualdad de Brunn–Minkowski	131
11.1. Enunciado	131
11.2. Dos lemas	132
11.3. Demostración vía transporte óptimo	133
Ejercicios	135
Capítulo 12. Baricentros de Wasserstein	139
12.1. Definición y primeros ejemplos	139
12.2. Existencia	141
12.3. Convexidad y unicidad	142
12.4. Un criterio de optimalidad	143
12.5. La formulación multimarginal	144
12.6. Dos casos explícitos	145
Ejercicios	147
Capítulo 13. Transporte entrópico y el algoritmo de Sinkhorn	151
13.1. El problema entrópico	151
13.2. Dualidad entrópica	153

13.3. El algoritmo de Sinkhorn	155
13.4. Los límites $\varepsilon \rightarrow 0$ y $\varepsilon \rightarrow \infty$	157
13.5. Baricentros entrópicos	159
Ejercicios	161
Apéndice A. Complementos de teoría de la medida	165
A.1. Repaso de teoría de la medida	165
A.2. El teorema de desintegración	168
A.3. El lema de pegado	171
Ejercicios	172
Apéndice B. El teorema de Fenchel–Rockafellar	175
B.1. Transformada de Legendre–Fenchel	175
Ejercicios	179
Apéndice C. Factorización polar de matrices inversibles	181
C.1. El teorema de factorización polar	181
Ejercicios	183
Apéndice D. Subdiferencial de funciones convexas	185
D.1. Funciones convexas son localmente Lipschitz	185
D.2. El subdiferencial	186
D.3. Subdiferencial y transformada de Legendre	187
D.4. Subdiferencial y diferenciabilidad	188
D.5. El teorema de Rademacher	188
Ejercicios	189
Apéndice E. Cuadernos de cómputo	191
La biblioteca POT	191
Apéndice. Bibliografía	193

Capítulo 1

Introducción

Estas notas fueron elaboradas como una guía para el dictado del curso y no pretenden ser un texto original ni autosuficiente. Su objetivo es servir de apoyo durante las clases, presentando las definiciones, resultados y ejemplos que se desarrollarán en ellas.

La exposición es necesariamente incompleta y, en muchos casos, se omiten demostraciones, comentarios y desarrollos que se discutirán en clase. Por este motivo, estas notas deben entenderse como un complemento y no como un reemplazo de la bibliografía del curso.

La organización y buena parte de la exposición siguen principalmente los libros de Villani [21], Santambrogio [19] y de Panaretos y Zemel [16], que constituyen las referencias fundamentales para el desarrollo del curso.

Para una presentación más detallada de los distintos temas, así como para consultar la bibliografía recomendada, se invita al lector a visitar el Campus Virtual de la materia:

<https://campus.exactas.uba.ar/course/view.php?id=1228>.

1.1. El problema de Monge

En 1781, Gaspard Monge estudió el problema de los desmontes y terraplenes: dada una región de la que debe extraerse cierta cantidad de tierra y otra que debe rellenarse con el mismo volumen, ¿cómo organizar el transporte minimizando el costo total?

1.1.1. El caso discreto. Supongamos que tenemos n depósitos de tierra, ubicados en los puntos

$$x_1, \dots, x_n,$$

y m pozos, ubicados en

$$y_1, \dots, y_m.$$

El depósito x_i contiene una cantidad $a_i > 0$ de tierra y el pozo y_j tiene capacidad $b_j > 0$, donde

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j.$$

Transportar una unidad de tierra desde x_i hasta y_j tiene un costo

$$c(x_i, y_j).$$

Si cada depósito debe enviarse íntegramente a un único pozo, una estrategia de transporte está dada por una aplicación

$$T: \{x_1, \dots, x_n\} \longrightarrow \{y_1, \dots, y_m\}.$$

No toda aplicación es admisible. Para cada pozo y_j , la cantidad total de tierra que recibe debe coincidir con su capacidad, es decir,

$$\sum_{T(x_i)=y_j} a_i = b_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

El costo total asociado a la aplicación T es

$$C(T) = \sum_{i=1}^n c(x_i, T(x_i)) a_i.$$

El problema de Monge consiste en encontrar, entre todas las aplicaciones admisibles, aquella que minimiza el costo total de transporte.

1.1.2. El caso continuo. Supongamos ahora que la tierra ocupa una región $X \subset \mathbb{R}^d$ con densidad ρ_0 , mientras que la excavación ocupa una región $Y \subset \mathbb{R}^d$ con densidad objetivo ρ_1 . Supondremos que ambas contienen la misma cantidad total de masa,

$$\int_X \rho_0(x) dx = \int_Y \rho_1(y) dy.$$

Una estrategia de transporte consiste en una aplicación

$$T: X \longrightarrow Y,$$

que indica a qué punto de la excavación se traslada cada partícula de tierra.

Si transportar una unidad de masa desde x hasta $T(x)$ tiene un costo

$$c(x, T(x)),$$

el costo total del transporte viene dado por

$$C(T) = \int_X c(x, T(x)) \rho_0(x) dx.$$

La aplicación T debe preservar la masa. Es decir, para toda región medible $B \subset Y$, la cantidad de tierra que llega a B debe coincidir con la capacidad de dicha región:

$$\int_{T^{-1}(B)} \rho_0(x) dx = \int_B \rho_1(y) dy.$$

El problema de Monge consiste entonces en minimizar el costo total entre todas las aplicaciones que satisfacen esta condición de preservación de la masa.

1.1.3. Funciones de costo. La función

$$c: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$$

representa el costo de transportar una unidad de masa desde x hasta y .

Entre los costos más utilizados se encuentran:

1. El costo lineal

$$c(x, y) = |x - y|,$$

que modela un costo proporcional a la distancia recorrida.

2. El costo cuadrático

$$c(x, y) = |x - y|^2,$$

que es el más estudiado en la teoría moderna del transporte óptimo.

3. Más generalmente,

$$c(x, y) = |x - y|^p, \quad p \geq 1,$$

que conduce a las distancias de Wasserstein W_p , que estudiaremos más adelante.

1.2. El problema de Monge en espacios de medida

La formulación de la sección anterior distingue entre el caso discreto y el continuo. Ambos pueden tratarse dentro de un mismo marco utilizando la noción de medida, que además permite considerar espacios mucho más generales que $\mathbb{R}^d$. Las nociones de teoría de la medida que necesitamos — σ -álgebras, medidas de probabilidad, funciones medibles, integral, y los ejemplos básicos de medidas de Dirac, discretas y con densidad— se recuerdan en el Apéndice A, Sección A.1, junto con la notación que usaremos: $\mathcal{P}(X)$ para las medidas de probabilidad sobre X , $\mathcal{B}(X)$ para los borelianos de un espacio métrico y $\mathcal{L}^d$ para la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^d$.

Hasta ahora hemos estudiado dos versiones del problema de transporte: una discreta, en la que la masa está concentrada en un número finito de puntos, y otra continua, en la que la distribución de masa está descrita mediante funciones de densidad. En esta sección veremos que ambas formulaciones pueden expresarse de una manera unificada utilizando medidas.

1.2.1. El caso discreto. Recordemos que el problema discreto consiste en transportar masas $a_1, \dots, a_n$ ubicadas en los puntos $x_1, \dots, x_n$ hacia masas $b_1, \dots, b_m$ ubicadas en los puntos $y_1, \dots, y_m$, satisfaciendo

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j.$$

Estas distribuciones de masa pueden representarse mediante las medidas discretas

$$\mu = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}, \quad \nu = \sum_{j=1}^m b_j \delta_{y_j}.$$

Si $T: \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{y_1, \dots, y_m\}$ es una aplicación que transporta la masa inicial a la final, la condición de conservación de la masa puede escribirse como

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$$

para todo subconjunto $B \subset \{y_1, \dots, y_m\}$.

Por otra parte, el costo total del transporte puede escribirse como

$$\sum_{i=1}^n c(x_i, T(x_i)) a_i = \int c(x, T(x)) d\mu(x).$$

1.2.2. El caso continuo. Supongamos ahora que $X = Y = \mathbb{R}^d$ y que las distribuciones inicial y final poseen densidades ρ_0 y ρ_1 , respectivamente. Es decir,

$$d\mu(x) = \rho_0(x) dx, \quad d\nu(y) = \rho_1(y) dy.$$

Recordemos que la condición de conservación de la masa puede expresarse como

$$\int_{T^{-1}(B)} \rho_0(x) dx = \int_B \rho_1(y) dy$$

para todo conjunto boreliano $B \subset \mathbb{R}^d$.

Utilizando las medidas μ y ν , esta condición puede reescribirse simplemente como

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B)).$$

Asimismo, el costo del transporte

$$\int_{\mathbb{R}^d} c(x, T(x)) \rho_0(x) dx$$

puede escribirse como

$$\int_{\mathbb{R}^d} c(x, T(x)) d\mu(x).$$

Esto motiva la siguiente formulación general del problema de Monge.

DEFINICIÓN 1.2.1 (Problema de Monge). Sean X e Y espacios medibles, $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, y sea

$$c: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$$

una función de costo.

El *problema de Monge* consiste en encontrar una aplicación medible

$$T: X \rightarrow Y$$

que minimice el costo total de transporte

$$\int_X c(x, T(x)) d\mu(x),$$

entre todas las aplicaciones T que satisfacen la condición de conservación de la masa

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$$

para todo conjunto medible $B \subset Y$.

Equivalentemente,

$$\min \left\{ \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) : \begin{array}{l} T: X \rightarrow Y, \\ \nu(B) = \mu(T^{-1}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}(Y) \end{array} \right\}.$$

La condición de conservación de la masa

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(Y),$$

aparece de manera recurrente en la teoría del transporte óptimo. Esto motiva introducir una notación específica para la medida obtenida al transportar una medida mediante una aplicación.

DEFINICIÓN 1.2.2 (Medida imagen). Sean $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ espacios medibles, $\mu \in \mathcal{M}_+(X)$ y $T: X \rightarrow Y$ una aplicación medible.

La *medida imagen* (o *push-forward*) de μ mediante T es la medida $T_{\#}\mu \in \mathcal{M}_+(Y)$ definida por

$$T_{\#}\mu(B) = \mu(T^{-1}(B))$$

para todo $B \in \mathcal{B}$.

Con esta notación el Problema de Monge queda formulado como:

$$(PM) \quad \min \left\{ \int_X c(x, T(x)) d\mu(x) : \begin{array}{l} T: X \rightarrow Y \text{ medible,} \\ T_{\#}\mu = \nu. \end{array} \right\}.$$

En general, la función

$$c: X \times Y \rightarrow [0, \infty]$$

representa el costo de transportar una unidad de masa desde $x \in X$ hasta $y \in Y$. La teoría que desarrollaremos es válida para funciones de costo bastante generales.

En muchos de los problemas que estudiaremos, el espacio de partida y de llegada coinciden y están provistos de una distancia d . En ese caso, una familia natural de funciones de costo está dada por

$$c(x, y) = d(x, y)^p, \quad p \geq 1,$$

que generaliza los costos $c(x, y) = |x - y|^p$ considerados en $\mathbb{R}^d$.

1.3. La relajación de Kantorovich

El problema de Monge (PM) presenta importantes dificultades analíticas.

En primer lugar, la condición de conservación de la masa impuesta sobre la aplicación T es muy restrictiva, por lo que el conjunto de aplicaciones admisibles puede ser vacío. En consecuencia, el problema puede no tener solución.

EJEMPLO 1.3.1. Sea

$$\mu = \delta_{x_0},$$

y supongamos que ν no es una medida de Dirac.

No existe ninguna aplicación $T: X \rightarrow Y$ tal que

$$T_{\#}\mu = \nu.$$

En efecto, si existiera, la imagen de toda la masa concentrada en x_0 debería enviarse a un único punto $T(x_0)$, por lo que

$$T_{\#}\mu = \delta_{T(x_0)},$$

que sigue siendo una medida de Dirac.

Por otra parte, aun cuando exista una aplicación admisible, la restricción

$$T_{\#}\mu = \nu$$

es altamente no lineal. En el caso en que

$$d\mu = \rho_0(x) dx, \quad d\nu = \rho_1(y) dy,$$

y T es suficientemente regular, dicha condición equivale a la ecuación

$$\rho_1(T(x)) |\det DT(x)| = \rho_0(x),$$

que ya es una ecuación no lineal para T . En efecto

PROPOSICIÓN 1.3.2. *Supongamos que $\mu = \rho_0 dx$, $\nu = \rho_1 dx$ y que $T : \Omega \rightarrow \Omega$ es un difeomorfismo de clase C^1 que satisface $T_{\#}\mu = \nu$.*

Entonces

$$\rho_1(T(x)) |\det DT(x)| = \rho_0(x)$$

para casi todo $x \in \Omega$ (y para todo x si ρ_0 y ρ_1 son continuas).

DEMOSTRACIÓN. Como $T_{\#}\mu = \nu$, para todo boreliano $B \subset \Omega$ se tiene

$$\mu(T^{-1}(B)) = \nu(B),$$

es decir,

$$\int_{T^{-1}(B)} \rho_0(x) dx = \int_B \rho_1(y) dy.$$

Aplicando el teorema de cambio de variables con $y = T(x)$ obtenemos

$$\int_{T^{-1}(B)} \rho_0(x) dx = \int_B \rho_0(T^{-1}(y)) |\det DT^{-1}(y)| dy.$$

Comparando con la identidad anterior, concluimos que

$$\rho_1(y) = \rho_0(T^{-1}(y)) |\det DT^{-1}(y)|$$

para casi todo $y \in \Omega$.

Finalmente, sustituyendo $y = T(x)$ y usando la identidad

$$DT^{-1}(T(x)) = (DT(x))^{-1},$$

obtenemos

$$|\det DT^{-1}(T(x))| = \frac{1}{|\det DT(x)|},$$

de donde

$$\rho_1(T(x)) = \frac{\rho_0(x)}{|\det DT(x)|},$$

o, equivalentemente,

$$\rho_1(T(x)) |\det DT(x)| = \rho_0(x),$$

como queríamos demostrar. □

OBSERVACIÓN 1.3.3. La identidad

$$\rho_1(T(x)) |\det DT(x)| = \rho_0(x)$$

es una consecuencia del teorema de cambio de variables y corresponde al caso en que el dominio y el codominio tienen la misma dimensión.

Cuando $X = \mathbb{R}^d$ e $Y = \mathbb{R}^k$ con $k \neq d$, se obtienen relaciones análogas entre las densidades mediante las fórmulas de área y de córea, que constituyen extensiones naturales del teorema de cambio de variables. Para una presentación detallada de estos resultados remitimos al libro de Evans y Gariepy [9].

Más aún, incluso cuando el conjunto de aplicaciones admisibles no es vacío, presenta serias dificultades analíticas: en general no es cerrado para topologías razonables sobre las aplicaciones, de modo que extraer límites de sucesiones minimizantes no es inmediato. Estas obstrucciones hacen que el método directo del cálculo de variaciones no sea directamente aplicable al problema de Monge.

Estas dificultades motivaron a Leonid Kantorovich a proponer una relajación del problema de Monge. La idea fundamental consiste en abandonar la búsqueda de una aplicación de transporte. En lugar de imponer que toda la masa situada en un punto $x \in X$ deba enviarse a un único punto de destino, se permite dividir esa masa entre distintos puntos de llegada.

Para describir esta situación, en lugar de una aplicación se considera una medida de probabilidad

$$\pi \in \mathcal{P}(X \times Y),$$

llamada *plan de transporte*. Intuitivamente, $\pi(A \times B)$ representa la cantidad de masa que se transporta desde el conjunto $A \subset X$ hasta el conjunto $B \subset Y$.

En consecuencia, $\pi(A \times Y)$ representa la masa total que sale de A , mientras que $\pi(X \times B)$ representa la masa total que llega a B . La conservación de la masa exige entonces que

$$\pi(A \times Y) = \mu(A), \quad A \in \mathcal{B}(X),$$

y

$$\pi(X \times B) = \nu(B), \quad B \in \mathcal{B}(Y).$$

Si denotamos por

$$\mathbf{p}_1(x, y) = x, \quad \mathbf{p}_2(x, y) = y,$$

las proyecciones canónicas sobre la primera y segunda componente, las condiciones anteriores pueden escribirse de forma más compacta como

$$(\mathbf{p}_1)_\# \pi = \mu, \quad (\mathbf{p}_2)_\# \pi = \nu.$$

Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 1.3.4 (Plan de transporte). Sean $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\nu \in \mathcal{P}(Y)$. Un *plan de transporte* entre μ y ν es una medida

$$\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$$

cuyas marginales son μ y ν , es decir,

$$(\mathbf{p}_1)_\# \pi = \mu, \quad (\mathbf{p}_2)_\# \pi = \nu.$$

Denotaremos por

$$\Pi(\mu, \nu)$$

al conjunto de todos los planes de transporte entre μ y ν .

El costo asociado a un plan de transporte $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ se define por

$$\int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y),$$

que representa el costo total de transportar la masa de acuerdo con el plan π .

De esta manera, la relajación de Kantorovich del problema de Monge consiste en resolver

$$(PK) \quad \min \left\{ \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) : \pi \in \Pi(\mu, \nu) \right\}.$$

El problema de Kantorovich es efectivamente una relajación del problema de Monge. En efecto, dada una aplicación de transporte

$$T: X \rightarrow Y,$$

es posible asociarle el plan de transporte

$$\pi_T = (\text{id}, T)_\# \mu,$$

donde

$$(\text{id}, T): X \rightarrow X \times Y, \quad x \mapsto (x, T(x)).$$

Es inmediato verificar que

$$\pi_T \in \Pi(\mu, \nu)$$

si y sólo si

$$T_\# \mu = \nu,$$

y además

$$\int_{X \times Y} c(x, y) d\pi_T(x, y) = \int_X c(x, T(x)) d\mu(x).$$

Por lo tanto, toda aplicación admisible para el problema de Monge induce un plan admisible para el problema de Kantorovich con el mismo costo.

El problema de Kantorovich (PK) presenta ventajas fundamentales respecto del problema de Monge (PM).

En primer lugar, el conjunto de planes admisibles nunca es vacío. En efecto, siempre contiene a la medida producto

$$\mu \otimes \nu,$$

ya que

$$(\mathbf{p}_1)_\#(\mu \otimes \nu) = \mu, \quad (\mathbf{p}_2)_\#(\mu \otimes \nu) = \nu.$$

En segundo lugar, tanto la función de costo

$$\pi \mapsto \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

como las restricciones

$$(\mathbf{p}_1)_\# \pi = \mu, \quad (\mathbf{p}_2)_\# \pi = \nu,$$

son lineales con respecto al plan de transporte π . Por lo tanto, el problema de Kantorovich puede interpretarse como un problema de programación lineal en un espacio de dimensión infinita.

Estas dos propiedades hacen que el problema de Kantorovich sea mucho más tratable desde el punto de vista analítico y constituyen una de las principales razones de su enorme desarrollo.

Como veremos más adelante, el problema de Kantorovich admite, bajo hipótesis muy generales sobre el costo y las medidas, al menos un plan de transporte óptimo

$$\pi^* \in \Pi(\mu, \nu).$$

Sin embargo, dicho plan óptimo no tiene por qué estar inducido por una aplicación de transporte. Una de las cuestiones centrales de la teoría del transporte óptimo consiste precisamente en determinar bajo qué condiciones existe una aplicación

$$T^*: X \rightarrow Y$$

tal que

$$\pi^* = \pi_{T^*}.$$

Cuando esto ocurre, el plan óptimo de Kantorovich proporciona automáticamente una solución del problema original de Monge. En efecto, como ambos problemas tienen el mismo costo para los planes inducidos por aplicaciones de transporte, se concluye que T^* es un transporte óptimo para el problema de Monge.

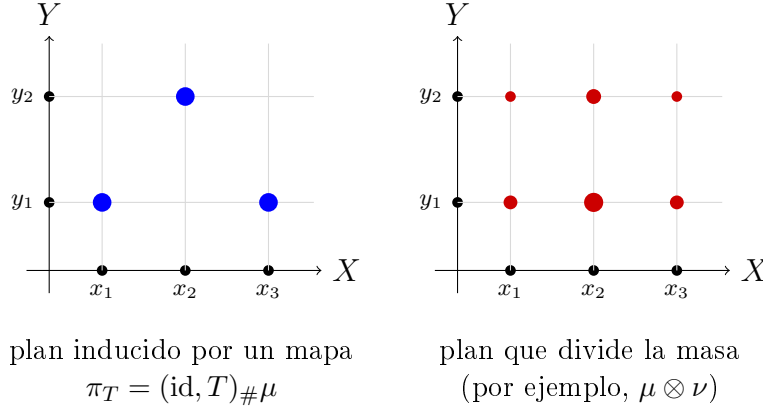


FIGURA 1.1. Dos planes de transporte entre $\mu = \sum_i a_i \delta_{x_i}$ y $\nu = \sum_j b_j \delta_{y_j}$, vistos como medidas en $X \times Y$; el área de cada punto es proporcional a la masa $\pi(\{(x_i, y_j)\})$. A la izquierda, un plan inducido por un mapa: cada columna tiene un único punto, toda la masa de x_i va a $T(x_i)$. A la derecha, un plan genuinamente de Kantorovich: la masa de cada x_i se reparte entre varios destinos. Las marginales se leen sumando la masa de cada columna (debe dar a_i) y de cada fila (debe dar b_j).

1.4. Una interpretación probabilística del problema de Kantorovich

Hasta ahora, hemos presentado el problema de Monge como la búsqueda de una función T que mueve puntos de manera determinista. La relajación de Kantorovich permite una interpretación probabilística particularmente natural, si traducimos el lenguaje de medidas al de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad común $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

En la formulación de Kantorovich, las variables aleatorias $\mathbf{X}$ y $\mathbf{Y}$ no están fijadas conjuntamente. Lo que conocemos son únicamente sus leyes marginales

$$\mathbf{X}_\# \mathbb{P} = \mu, \quad \mathbf{Y}_\# \mathbb{P} = \nu.$$

Estas leyes no determinan, en general, la ley conjunta de $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$. Existen, por lo tanto, muchas maneras posibles de establecer una dependencia entre ambas variables que

sean compatibles con las mismas leyes marginales. Cada una de ellas determina un acoplamiento

$$\pi = (\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{\#} \mathbb{P} \in \Pi(\mu, \nu).$$

Así, podemos interpretar un plan de transporte como una elección de la estructura de dependencia entre dos variables aleatorias cuyas leyes marginales están fijadas. Para un acoplamiento particular $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, el costo de transporte es el costo esperado

$$\mathbb{E}_{\pi}[c(\mathbf{X}, \mathbf{Y})].$$

En efecto, si $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ tiene ley conjunta π , entonces

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y})_{\#} \mathbb{P} = \pi$$

y, por el teorema de cambio de variables,

$$\mathbb{E}_{\pi}[c(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \int_{\Omega} c(\mathbf{X}(\omega), \mathbf{Y}(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y).$$

El problema de Kantorovich consiste, entonces, en elegir, entre todas las posibles leyes conjuntas con marginales μ y ν , aquella que minimiza el costo esperado:

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}_{\pi}[c(\mathbf{X}, \mathbf{Y})].$$

Esta libertad en la elección de la ley conjunta permite que, para un origen x , la masa pueda distribuirse entre varios destinos y . Este fenómeno, conocido como *división de masa* o *mass splitting*, no es posible en general en el problema de Monge, donde cada origen x tiene asociado un único destino $T(x)$.

1.5. El caso discreto

En esta sección estudiaremos el problema de transporte óptimo cuando las medidas involucradas son discretas y asignan la misma masa a un número finito de puntos. Aunque se trata de un caso particular, resulta especialmente importante por varios motivos. En primer lugar, permite visualizar de manera muy concreta la diferencia entre los problemas de Monge y Kantorovich. Además, constituye un ejemplo elemental de programación lineal y servirá como motivación para la teoría de dualidad que desarrollaremos en el capítulo siguiente.

Supongamos entonces que

$$\mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}, \quad \nu = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{y_j},$$

donde $x_1, \dots, x_n \in X$ e $y_1, \dots, y_n \in Y$ son puntos distintos.

Un mapa de transporte

$$T: X \rightarrow Y$$

debe enviar cada uno de los puntos x_i sobre alguno de los puntos y_j . Además, la condición

$$T_{\#} \mu = \nu$$

implica que cada punto y_j debe recibir exactamente una masa igual a $1/n$. Como todas las masas son iguales, esto sólo es posible si T establece una biyección entre los conjuntos

$$\{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{y} \quad \{y_1, \dots, y_n\}.$$

En consecuencia, todo mapa de transporte está determinado por una permutación

$$\sigma \in S_n,$$

donde S_n denota el grupo de las permutaciones de $\{1, \dots, n\}$, mediante la relación

$$T(x_i) = y_{\sigma(i)}.$$

Si definimos

$$c_{ij} = c(x_i, y_j),$$

el problema de Monge consiste entonces en encontrar la permutación que minimiza el costo

$$C(\sigma) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n c_{i\sigma(i)}.$$

En el problema de Kantorovich, en cambio, un plan de transporte $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ puede repartir la masa ubicada en cada punto x_i entre varios puntos y_j . En este caso, el plan queda completamente determinado por los números

$$M_{ij} = \pi(\{(x_i, y_j)\}),$$

que representan la cantidad de masa transportada desde x_i hasta y_j .

Para que π sea un plan de transporte, la matriz $M = (M_{ij})$ debe satisfacer

$$\sum_{j=1}^n M_{ij} = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n,$$

y

$$\sum_{i=1}^n M_{ij} = \frac{1}{n}, \quad j = 1, \dots, n,$$

además de

$$M_{ij} \geq 0.$$

En otras palabras, la matriz nM es una matriz biestocástica. Denotaremos por $\mathcal{B}_n$ al conjunto de todas las matrices biestocásticas de orden n , es decir,

$$\mathcal{B}_n = \left\{ A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n} : a_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^n a_{ij} = 1, \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1 \right\}.$$

El problema de Kantorovich puede escribirse entonces como

$$\min_{M \in \mathcal{B}_n/n} \sum_{i,j=1}^n c_{ij} M_{ij},$$

es decir, como un problema de programación lineal.

Por otra parte, toda permutación $\sigma \in S_n$ determina una matriz

$$M(\sigma)_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \text{si } j = \sigma(i), \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

que representa el plan de transporte inducido por el mapa correspondiente. Las matrices $nM(\sigma)$ se denominan *matrices de permutación*.

La relación entre los problemas de Monge y Kantorovich en este contexto está dada por el siguiente resultado fundamental.

TEOREMA 1.5.1 (Birkhoff). *Los puntos extremos del conjunto $\mathcal{B}_n$ son precisamente las matrices de permutación.*

La demostración puede consultarse, por ejemplo, en [21].

Como consecuencia, el problema de programación lineal asociado a Kantorovich admite una solución óptima que corresponde a una matriz de permutación. En particular, en este caso el problema de Kantorovich posee una solución inducida por un mapa de transporte y, por lo tanto, los problemas de Monge y Kantorovich son equivalentes.

Ejercicios

EJERCICIO 1.1 (Push-forward). Sea (X, Σ, μ) un espacio de medida, Y un conjunto y $T: X \rightarrow Y$ una aplicación.

- Probar que $\Sigma' = \{B \subset Y : T^{-1}(B) \in \Sigma\}$ es la mayor σ -álgebra en Y que hace medible a T , y que $\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$ define una medida en (Y, Σ') . Si μ es de probabilidad, $\nu = T_{\#}\mu$ también lo es.
- Si $S: Y \rightarrow Z$ es medible, $(S \circ T)_{\#}\mu = S_{\#}(T_{\#}\mu)$. Deducir que si T es biyectiva y bimedible, $\nu = T_{\#}\mu$ si y sólo si $\mu = (T^{-1})_{\#}\nu$.
- Si $\mu = \sum_{i \geq 1} m_i \delta_{x_i}$, escribir $T_{\#}\mu$ como una medida de soporte numerable.
- Dar un ejemplo de $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ y $T: X \rightarrow Y$ medible tales que $\mu(\{x\}) = \nu(\{T(x)\})$ para todo $x \in X$ pero $\nu \neq T_{\#}\mu$.

EJERCICIO 1.2 (Caracterización integral del push-forward). Sean X, Y espacios métricos, $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $T: X \rightarrow Y$ medible. Probar que $T_{\#}\mu = \nu$ si y sólo si

$$\int_X \phi(T(x)) d\mu(x) = \int_Y \phi(y) d\nu(y) \quad \text{para toda } \phi \in L^1(\nu).$$

Sugerencia: empezar con $\phi = \mathbf{1}_B$, pasar a funciones simples, luego a funciones no negativas por convergencia monótona, y finalmente a $L^1(\nu)$.

EJERCICIO 1.3 (Ejemplos de push-forward). Calcular las siguientes medidas imagen, decidir si son absolutamente continuas respecto de la medida de Lebesgue y, en ese caso, hallar su densidad.

- $T(x) = 2x + 1$; $T_{\#}\delta_0$, $T_{\#}(\frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1)$, $T_{\#}(\mathcal{L}^1|_{[0,1]})$.
- $T(x) = x^2$; $T_{\#}(\mathcal{L}^1|_{[0,1]})$ y $T_{\#}(\frac{1}{2}\mathcal{L}^1|_{[-1,1]})$.
- $T(x) = x - [x]$ (parte fraccionaria); $T_{\#}(\frac{1}{2}\mathcal{L}^1|_{[0,2]})$ y $T_{\#}(\mathcal{L}^1|_{[0,3/2] \cdot \frac{2}{3}})$.

EJERCICIO 1.4 (Cambio de variables: contraejemplos). La Proposición 1.3.2 da la fórmula $f(x) = g(T(x)) |\det DT(x)|$ para T de clase C^1 y biyectiva.

- (a) Verificar que la fórmula falla para $T(x) = x^2$ con $\mu = \frac{1}{2}\mathcal{L}^1|_{[-1,1]}$ (comparar con el Ejercicio 1.3) y para la “carpa” $T(x) = \min\{2x, 2 - 2x\}$ con $\mu = \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$, e identificar en cada caso qué hipótesis no se cumple.
- (b) Probar la versión para T de clase C^1 localmente inyectiva pero no biyectiva: si $T_{\#}(f dx) = g dy$ entonces $g(y) = \sum_{x \in T^{-1}(y)} f(x)/|\det DT(x)|$.
- (c) Probar que si $T: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ es continua, estrictamente creciente y $T_{\#}\mathcal{L}^1|_{[0,1]} = \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$, entonces $T = \text{id}$.

EJERCICIO 1.5 (Soporte del push-forward). Sea $\mu \in \mathcal{P}(X)$ con X métrico y $T: X \rightarrow Y$ continua.

- (a) Probar que $\text{sop}(T_{\#}\mu) \subset \overline{T(\text{sop } \mu)}$, con igualdad si $\text{sop } \mu$ es compacto.
- (b) Dar un ejemplo en el que $T(\text{sop } \mu)$ no sea cerrado y la inclusión $\text{sop}(T_{\#}\mu) \subset T(\text{sop } \mu)$ sea falsa.
- (c) Determinar el soporte de $\mathcal{L}^1|_{(0,1)}$, de $\mathcal{L}^1|_{e^{-x}\mathbf{1}_{[0,\infty)}}$ y de $\mathcal{L}^1|_{[0,1] \setminus \mathbb{Q}}$.

EJERCICIO 1.6 (Planes inducidos por mapas). Sean $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ y $T: X \rightarrow Y$ medible con $T_{\#}\mu = \nu$.

- (a) Probar que $\pi = (\text{id}, T)_{\#}\mu$ satisface $\pi(A \times Y) = \mu(A)$ y $\pi(X \times B) = \nu(B)$, es decir, $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.
- (b) Probar que $\Pi(\mu, \nu) \neq \emptyset$ para cualesquiera μ, ν , aunque no exista ningún T con $T_{\#}\mu = \nu$.
- (c) Probar que $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ está inducido por un mapa si y sólo si π está concentrado en el gráfico de una función medible $T: X \rightarrow Y$, es decir, $\pi(\{(x, T(x)) : x \in X\}) = 1$. (Compárese con el Lema 9.1.2.)

EJERCICIO 1.7 (Un plan que no proviene de un mapa). Sean $\mu = \nu = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1$ y

$$\pi = \frac{1}{4}(\delta_{(0,0)} + \delta_{(0,1)} + \delta_{(1,0)} + \delta_{(1,1)}).$$

Verificar que $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ y que no existe T con $\pi = (\text{id}, T)_{\#}\mu$. Describir todos los elementos de $\Pi(\mu, \nu)$ y decidir cuáles provienen de un mapa.

EJERCICIO 1.8 (El conjunto de mapas de transporte no es convexo). Sean $\mu = \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$, $\nu = \mathcal{L}^1|_{[1/4, 5/4]}$,

$$T_0(x) = x + \frac{1}{4}, \quad T_1(x) = \begin{cases} x + 1, & x \in [0, \frac{1}{4}), \\ x, & x \in [\frac{1}{4}, 1]. \end{cases}$$

- (a) Probar que $(T_i)_{\#}\mu = \nu$ y que $\int |T_i(x) - x| d\mu = \frac{1}{4}$ para $i = 0, 1$.
- (b) Probar que para todo $\alpha \in (0, 1)$, $(1 - \alpha)T_0 + \alpha T_1$ no transporta μ en ν . Concluir que $\mathcal{T}(\mu, \nu) = \{T : T_{\#}\mu = \nu\}$ no es convexo.
- (c) Probar en cambio que $\Pi(\mu, \nu)$ es convexo y que el funcional de Kantorovich $\pi \mapsto \int c d\pi$ es afín sobre $\Pi(\mu, \nu)$. Éste es uno de los motivos de la relajación de Kantorovich.

EJERCICIO 1.9 (Caracterización de los planes por integrales). Sean $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ y $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$. Probar que $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ si y sólo si

$$\int_{X \times Y} (\phi(x) + \psi(y)) d\pi(x, y) = \int_X \phi d\mu + \int_Y \psi d\nu \quad \text{para todo } (\phi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu),$$

verificando en particular que, para $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, la función $\phi(x) + \psi(y)$ pertenece a $L^1(\pi)$.

EJERCICIO 1.10 (Mínimos de funcionales lineales y puntos extremos). Sea E un espacio de Banach, $K \subset E$ compacto y convexo, y $\ell \in E^*$. Se dice que $x \in K$ es *extremal* si $x \in [x_1, x_2]$ con $x_1, x_2 \in K$ implica $x = x_1$ o $x = x_2$; denotamos $\mathcal{E}(K)$ al conjunto de puntos extremos. El teorema de Krein–Milman afirma que $K = \overline{\text{co}} \mathcal{E}(K)$.

- (a) Probar que existe $x \in K$ con $\ell(x) = \min_K \ell$.
- (b) Probar que el conjunto de minimizadores es compacto, convexo y *extremal* en K (si un segmento de K tiene su punto medio en él, todo el segmento está en él). Deducir, usando Krein–Milman, que existe un minimizador $x_0 \in \mathcal{E}(K)$.

EJERCICIO 1.11 (Matrices biestocásticas). Sea $\mathcal{B}_n$ el conjunto de matrices $\pi \in \mathbb{R}^{n \times n}$ con entradas no negativas cuyas filas y columnas suman 1.

- (a) Probar que $\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} t & 1-t \\ 1-t & t \end{pmatrix} : t \in [0, 1] \right\}$ y hallar sus puntos extremos.
- (b) Probar que $\mathcal{B}_n$ es compacto y convexo, y que toda matriz de permutación $\pi_{ij}^\sigma = \delta_{j\sigma(i)}$ es un punto extremal.
- (c) Probar que si $\pi \in \mathcal{B}_n$ tiene una entrada $\pi_{i_0 j_0} \in (0, 1)$, entonces π no es extremal. *Sugerencia:* construir una sucesión $\pi_{i_0 j_1}, \pi_{i_1 j_1}, \pi_{i_1 j_2}, \dots$ de entradas en $(0, 1)$, alternando filas y columnas, hasta cerrar un ciclo; perturbar las entradas del ciclo en $\pm \varepsilon$ alternadamente y escribir π como punto medio de dos elementos distintos de $\mathcal{B}_n$.
- (d) Concluir el teorema de Birkhoff–von Neumann: $\mathcal{E}(\mathcal{B}_n)$ es el conjunto de matrices de permutación y toda matriz biestocástica es combinación convexa de matrices de permutación.

Capítulo 2

Existencia de planes óptimos

En el capítulo anterior introdujimos el problema de Kantorovich como una relajación del problema de Monge. Vimos que esta formulación presenta ventajas importantes: el conjunto de planes de transporte admisibles nunca es vacío y el problema puede interpretarse como un problema de programación lineal en dimensión infinita.

El objetivo de este capítulo es demostrar que, bajo hipótesis muy generales sobre el costo, el problema de Kantorovich admite siempre una solución. Para ello utilizaremos el método directo del cálculo de variaciones, una herramienta fundamental para establecer resultados de existencia en problemas de minimización.

La aplicación del método directo requiere verificar dos propiedades esenciales: por un lado, que toda sucesión minimizante posea una subsucesión convergente y, por otro, que el funcional costo sea semicontinuo inferior respecto de esa noción de convergencia. Esto nos llevará a introducir la convergencia débil de medidas y a estudiar algunas de sus propiedades básicas, que constituyen una herramienta fundamental en la teoría del transporte óptimo.

2.1. El método directo del cálculo de variaciones

El método directo del cálculo de variaciones proporciona un criterio general para demostrar la existencia de minimizadores de un funcional. La idea consiste en construir una sucesión cuyos valores del funcional se aproximen al ínfimo, extraer de ella una subsucesión convergente y utilizar la semicontinuidad inferior del funcional para concluir que el límite es efectivamente un minimizador.

Más precisamente, se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1.1 (Método directo). *Sea X un espacio topológico y sea*

$$F: X \rightarrow (-\infty, +\infty].$$

Supongamos que

1. *existe una sucesión minimizante $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, es decir,*

$$F(x_n) \longrightarrow \inf_{x \in X} F(x);$$

2. *toda sucesión minimizante posee una subsucesión convergente;*
3. *F es semicontinua inferiormente, es decir, si*

$$x_n \longrightarrow x,$$

entonces

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n).$$

Entonces F alcanza su mínimo en algún punto de X .

DEMOSTRACIÓN. Sea (x_n) una sucesión minimizante. Por hipótesis, existe una sub-sucesión, que seguimos denotando por (x_n) , tal que

$$x_n \longrightarrow x.$$

Como F es semicontinua inferiormente,

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(x_n).$$

Por otra parte,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) = \inf_{y \in X} F(y),$$

ya que (x_n) es una sucesión minimizante. En consecuencia,

$$F(x) \leq \inf_{y \in X} F(y),$$

lo que implica

$$F(x) = \inf_{y \in X} F(y).$$

Por lo tanto, x es un minimizador de F . □

En nuestro contexto, el espacio X será el conjunto $\Pi(\mu, \nu)$ de planes de transporte. Consideraremos el funcional de Kantorovich

$$\mathcal{K}: \Pi(\mu, \nu) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

definido por

$$(2.1.1) \quad \mathcal{K}(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y).$$

Por lo tanto, para demostrar la existencia de planes óptimos bastará establecer que las sucesiones minimizantes de planes de transporte son precompactas para una topología adecuada y que el funcional $\mathcal{K}$ es semicontinuo inferior respecto de dicha topología.

2.2. La topología débil

Para aplicar el método directo al problema de Kantorovich es necesario introducir una noción de convergencia en el espacio de medidas de probabilidad. La topología más natural para este propósito es la topología débil, ya que permite establecer resultados de compacidad y es compatible con la semicontinuidad inferior del funcional de Kantorovich.

La idea es sencilla: una medida de probabilidad queda determinada por los valores de las integrales de funciones continuas acotadas. Esto conduce a la siguiente definición.

DEFINICIÓN 2.2.1 (Convergencia débil). Sea (X, d) un espacio métrico y sean $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y μ medidas de probabilidad sobre X . Se dice que (μ_n) converge débilmente a μ , y se escribe

$$\mu_n \rightharpoonup \mu,$$

si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi d\mu_n = \int_X \varphi d\mu$$

para toda función continua y acotada $\varphi \in C_b(X)$.

Veamos algunos ejemplos

EJEMPLO 2.2.2. Supongamos que $d\mu_n = f_n dx$, $d\mu = f dx$, donde $f_n, f \in L^1(\Omega)$ y

$$f_n \longrightarrow f \quad \text{en } L^1(\Omega).$$

Entonces

$$\mu_n \rightharpoonup \mu.$$

En efecto, si $\varphi \in C_b(\Omega)$,

$$\left| \int_{\Omega} \varphi d\mu_n - \int_{\Omega} \varphi d\mu \right| = \left| \int_{\Omega} \varphi (f_n - f) dx \right| \leq \|\varphi\|_{\infty} \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)},$$

que converge a cero.

EJEMPLO 2.2.3. Sea $(x_n) \subset X$ una sucesión tal que $x_n \longrightarrow x$. Entonces $\delta_{x_n} \rightharpoonup \delta_x$.

En efecto, para toda $\varphi \in C_b(X)$,

$$\int_X \varphi d\delta_{x_n} = \varphi(x_n) \longrightarrow \varphi(x) = \int_X \varphi d\delta_x,$$

por continuidad de φ .

EJEMPLO 2.2.4. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k/n}$$

en el intervalo $[0, 1]$.

Entonces

$$\mu_n \rightharpoonup \mathcal{L}^1|_{[0,1]},$$

donde $\mathcal{L}^1|_{[0,1]}$ denota la medida de Lebesgue restringida al intervalo $[0, 1]$.

En efecto, si $\varphi \in C([0, 1])$,

$$\int_{[0,1]} \varphi d\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right),$$

que converge a

$$\int_0^1 \varphi(x) dx,$$

por la convergencia de las sumas de Riemann.

Para aplicar el método directo es necesario determinar cuándo una sucesión de medidas de probabilidad posee una subsucesión débilmente convergente. El concepto fundamental para responder esta pregunta es el de familia ajustada de medidas, que expresa, en términos intuitivos, que la masa de las medidas no puede escapar hacia el infinito.

La importancia de esta noción radica en el siguiente resultado, debido a Prokhorov, que caracteriza la compacidad relativa para la topología débil.

DEFINICIÓN 2.2.5 (Familia ajustada). Sea X un espacio métrico y sea $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$. Se dice que $\mathcal{F}$ es una familia ajustada si para todo $\varepsilon > 0$ existe un conjunto compacto $K \subset X$ tal que

$$\mu(K) \geq 1 - \varepsilon$$

para toda $\mu \in \mathcal{F}$.

Tenemos el siguiente resultado de compacidad debido a Prokhorov:

TEOREMA 2.2.6 (Prokhorov). *Sea X un espacio métrico completo y separable. Una familia*

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(X)$$

es relativamente compacta para la topología débil si y sólo si es ajustada.

DEMOSTRACIÓN. La demostración de que toda familia ajustada es relativamente compacta para la topología débil, resultado que será el único utilizado en este curso, puede consultarse en [5, Theorem 5.1]. $\square$

2.3. Demostración de la existencia de planes óptimos

Una vez establecidas las herramientas de compacidad y semicontinuidad, estamos en condiciones de demostrar el principal resultado de este capítulo: la existencia de planes de transporte óptimos. La demostración consiste simplemente en verificar las hipótesis del método directo del cálculo de variaciones.

El siguiente resultado muestra que el conjunto de planes admisibles posee precisamente la propiedad de compacidad requerida por el método directo. Su demostración consiste simplemente en verificar que $\Pi(\mu, \nu)$ es una familia ajustada y aplicar el teorema de Prokhorov.

COROLARIO 2.3.1. *Sean X e Y espacios métricos completos y separables. Si*

$$\mu \in \mathcal{P}(X), \quad \nu \in \mathcal{P}(Y),$$

entonces el conjunto

$$\Pi(\mu, \nu)$$

es relativamente compacto para la topología débil de $\mathcal{P}(X \times Y)$.

DEMOSTRACIÓN. Para simplificar la demostración, suponemos además que X e Y son localmente compactos. La demostración completa sin esta hipótesis sigue exactamente el mismo argumento, reemplazando el uso directo de la compacidad local por el resultado de ajuste de medidas de probabilidad en espacios métricos completos separables, que está garantizado por [5, Theorem 1.3].

Basta demostrar que $\Pi(\mu, \nu)$ es una familia ajustada. Sea $\varepsilon > 0$. Como μ y ν son medidas de probabilidad, existen compactos

$$K_X \subset X, \quad K_Y \subset Y,$$

tales que

$$\mu(K_X) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \nu(K_Y) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Es decir, μ y ν son ajustadas. En el caso general [5, Theorem 1.3] garantiza que las medidas de probabilidad μ y ν son ajustadas sin asumir la compacidad local, a partir de lo cual la demostración continúa exactamente del mismo modo.

Como el producto de compactos es compacto, el conjunto

$$K_X \times K_Y \subset X \times Y$$

es compacto.

Sea ahora $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. Entonces

$$\begin{aligned} \pi((K_X \times K_Y)^c) &\leq \pi(K_X^c \times Y) + \pi(X \times K_Y^c) \\ &= \mu(K_X^c) + \nu(K_Y^c) \\ &\leq \varepsilon. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\pi(K_X \times K_Y) \geq 1 - \varepsilon$$

para toda $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. Esto prueba que $\Pi(\mu, \nu)$ es una familia ajustada.

La conclusión se sigue del teorema de Prokhorov. $\square$

Para completar la aplicación del método directo, resta verificar que el funcional de Kantorovich $\mathcal{K}$, dado por (2.1.1), es semicontinuo inferior respecto de la convergencia débil. Comenzamos por el caso más sencillo, en que el costo es acotado y el funcional resulta de hecho continuo.

PROPOSICIÓN 2.3.2. *Sean X e Y espacios métricos completos y separables y sea*

$$c: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

una función continua y acotada. Entonces el funcional

$$\mathcal{K}(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

es continuo para la convergencia débil de medidas. Es decir, si

$$\pi_n \rightharpoonup \pi,$$

entonces

$$\mathcal{K}(\pi_n) \longrightarrow \mathcal{K}(\pi).$$

DEMOSTRACIÓN. Como c es continua y acotada, se tiene

$$c \in C_b(X \times Y).$$

La conclusión es entonces inmediata de la definición de convergencia débil. $\square$

OBSERVACIÓN 2.3.3. En la mayoría de las aplicaciones de transporte óptimo la función de costo no es acotada; por ejemplo,

$$c(x, y) = |x - y|^p.$$

En ese caso el resultado anterior deja de ser válido en general y será necesario imponer hipótesis adicionales para garantizar la semicontinuidad inferior del funcional.

TEOREMA 2.3.4. Sean X e Y espacios métricos completos y separables, y sea

$$c: X \times Y \rightarrow [0, \infty)$$

una función continua. Entonces el funcional de Kantorovich

$$\mathcal{K}(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

es semicontinuo inferior para la convergencia débil. Es decir, si

$$\pi_n \rightharpoonup \pi,$$

entonces

$$\mathcal{K}(\pi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}(\pi_n).$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$c_m(x, y) = \min\{c(x, y), m\}.$$

Como c es continua, cada c_m también lo es. Además, c_m es acotada, por lo que la convergencia débil implica

$$\int_{X \times Y} c_m(x, y) d\pi_n(x, y) \longrightarrow \int_{X \times Y} c_m(x, y) d\pi(x, y).$$

Por otra parte, como $0 \leq c_m \uparrow c$, el teorema de convergencia monótona da

$$\int_{X \times Y} c_m(x, y) d\pi(x, y) \uparrow \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y),$$

y, para cada n ,

$$\int_{X \times Y} c_m(x, y) d\pi_n(x, y) \uparrow \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi_n(x, y).$$

Por lo tanto, para todo m ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi_n(x, y) \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c_m(x, y) d\pi_n(x, y) = \int_{X \times Y} c_m(x, y) d\pi(x, y).$$

Finalmente, haciendo $m \rightarrow \infty$ y aplicando nuevamente el teorema de convergencia monótona, obtenemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi_n(x, y) \geq \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y),$$

que es la tesis. □

Hasta ahora hemos supuesto que la función de costo c es continua. Esta hipótesis garantiza que el funcional de Kantorovich sea continuo cuando el costo es además acotado, y semicontinuo inferior cuando el costo es no negativo y continuo. Podemos debilitar aún más estas condiciones.

En lo que sigue supondremos únicamente que

$$c: X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$$

es semicontinua inferior. Esta hipótesis resulta ser suficiente para garantizar la semicontinuidad inferior del funcional de Kantorovich. La herramienta fundamental será el

siguiente resultado de aproximación de funciones semicontinuas inferiores por funciones continuas.

LEMA 2.3.5 (Aproximación de funciones semicontinuas inferiores). *Sea X un espacio métrico y sea $f: X \rightarrow [0, +\infty]$ una función semicontinua inferior. Entonces existe una sucesión de funciones $f_k: X \rightarrow [0, +\infty)$ continuas tal que $f_k \uparrow f$ puntualmente en X .*

Más precisamente, podemos definir

$$f_k(x) = \inf_{z \in X} \{f(z) + k d(x, z)\}.$$

Entonces cada f_k es k -Lipschitz y, para todo $x \in X$,

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq f(x) \quad y \quad \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x).$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $k \in \mathbb{N}$. Por definición,

$$f_k(x) = \inf_{z \in X} \{f(z) + k d(x, z)\}.$$

Veamos primero que f_k es k -Lipschitz. Sean $x, x' \in X$. Para todo $z \in X$,

$$f(z) + k d(x, z) \leq f(z) + k d(x', z) + k d(x, x'),$$

donde hemos utilizado la desigualdad triangular. Tomando ínfimo respecto de z , obtenemos

$$f_k(x) \leq f_k(x') + k d(x, x').$$

Intercambiando los papeles de x y x' , concluimos que

$$|f_k(x) - f_k(x')| \leq k d(x, x').$$

Por lo tanto, f_k es continua.

Además, tomando $z = x$ en la definición de f_k , obtenemos

$$f_k(x) \leq f(x).$$

Si $k \leq \ell$, entonces, para todo $z \in X$,

$$f(z) + k d(x, z) \leq f(z) + \ell d(x, z).$$

Por lo tanto,

$$f_k(x) \leq f_\ell(x).$$

En particular,

$$f_k(x) \leq f_{k+1}(x) \leq f(x).$$

Así, para cada $x \in X$, existe

$$\ell(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k(x)$$

y

$$\ell(x) \leq f(x).$$

Resta demostrar que $\ell(x) = f(x)$.

Fijemos $x \in X$ y sea $a < f(x)$. Como f es semicontinua inferior en x , existe $r > 0$ tal que

$$d(x, z) < r \implies f(z) > a.$$

Consideremos ahora un $z \in X$. Si $d(x, z) < r$, entonces

$$f(z) + k d(x, z) > a.$$

Si, en cambio, $d(x, z) \geq r$, entonces

$$f(z) + k d(x, z) \geq kr.$$

Por consiguiente,

$$f_k(x) = \inf_{z \in X} \{f(z) + k d(x, z)\} \geq \min\{a, kr\}.$$

Para k suficientemente grande se tiene $kr > a$, y por lo tanto

$$f_k(x) \geq a.$$

Pasando al límite,

$$\ell(x) \geq a.$$

Como $a < f(x)$ era arbitrario,

$$\ell(x) \geq f(x).$$

Junto con $\ell(x) \leq f(x)$, concluimos que

$$\ell(x) = f(x).$$

Por lo tanto,

$$f_k \uparrow f$$

puntualmente en X . □

TEOREMA 2.3.6. Sean X e Y espacios métricos completos y separables, y sea

$$c: X \times Y \longrightarrow [0, +\infty]$$

una función semicontinua inferior. Entonces el funcional de Kantorovich

$$\mathcal{K}(\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y)$$

es semicontinuo inferior respecto de la convergencia débil. Es decir, si $\pi_n \rightharpoonup \pi$, entonces $\mathcal{K}(\pi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}(\pi_n)$.

DEMOSTRACIÓN. Para cada $m \in \mathbb{N}$, definimos

$$c^m(x, y) = \min\{c(x, y), m\}.$$

Como c es semicontinua inferior, c^m también lo es. Por el lema anterior, existe una sucesión de funciones continuas

$$c_k^m: X \times Y \longrightarrow [0, m]$$

tal que $c_k^m \uparrow c^m$.

Como c_k^m es continua y acotada, la convergencia débil $\pi_n \rightharpoonup \pi$ implica

$$\int_{X \times Y} c_k^m d\pi_n \longrightarrow \int_{X \times Y} c_k^m d\pi.$$

Además, $c_k^m \leq c^m \leq c$, por lo que

$$\int_{X \times Y} c d\pi_n \geq \int_{X \times Y} c_k^m d\pi_n.$$

Por consiguiente,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c \, d\pi_n \geq \int_{X \times Y} c_k^m \, d\pi.$$

Esta desigualdad vale para todo k . Como $c_k^m \uparrow c^m$, el teorema de convergencia monótona da

$$\int_{X \times Y} c_k^m \, d\pi \uparrow \int_{X \times Y} c^m \, d\pi.$$

Por lo tanto,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c \, d\pi_n \geq \int_{X \times Y} c^m \, d\pi.$$

Finalmente, como $c^m \uparrow c$, aplicando nuevamente el teorema de convergencia monótona y haciendo $m \rightarrow \infty$, obtenemos

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} c \, d\pi_n \geq \int_{X \times Y} c \, d\pi.$$

Es decir,

$$\mathcal{K}(\pi) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}(\pi_n),$$

como queríamos demostrar □

El Corolario 2.3.1 garantiza que toda sucesión en $\Pi(\mu, \nu)$ tiene una subsucesión débilmente convergente, pero no dice que el límite sea nuevamente un plan de transporte. Para eso necesitamos saber que $\Pi(\mu, \nu)$ es débilmente cerrado, lo cual a su vez requiere el siguiente hecho elemental.

LEMA 2.3.7. *Sea X un espacio métrico y sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$. Si*

$$\int_X \varphi \, d\mu = \int_X \varphi \, d\nu$$

para toda función $\varphi \in C_b(X)$, entonces

$$\mu = \nu.$$

Es decir, una medida de probabilidad sobre un espacio métrico queda completamente determinada por sus integrales contra funciones continuas y acotadas.

DEMOSTRACIÓN. Sea $G \subset X$ un abierto. Para cada $k \in \mathbb{N}$, definimos

$$f_k(x) = \min\{1, k \, d(x, X \setminus G)\}.$$

Como la función distancia es continua, tenemos

$$f_k \in C_b(X), \quad 0 \leq f_k \leq 1.$$

Además, la sucesión (f_k) es creciente y

$$f_k(x) \longrightarrow \mathbf{1}_G(x)$$

para todo $x \in X$. En efecto, si $x \notin G$, entonces $d(x, X \setminus G) = 0$, mientras que si $x \in G$, el hecho de que G sea abierto implica

$$d(x, X \setminus G) > 0,$$

y por lo tanto $f_k(x) \rightarrow 1$.

Por el teorema de convergencia monótona,

$$\mu(G) = \int_X \mathbf{1}_G d\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\mu.$$

Por hipótesis,

$$\int_X f_k d\mu = \int_X f_k d\nu,$$

y nuevamente por convergencia monótona,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_X f_k d\nu = \int_X \mathbf{1}_G d\nu = \nu(G).$$

Por lo tanto,

$$\mu(G) = \nu(G)$$

para todo abierto $G \subset X$.

Como las medidas de Borel coinciden sobre todos los abiertos, se concluye que $\mu = \nu$ como queríamos ver. $\square$

LEMA 2.3.8. Sean X e Y espacios métricos, $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\nu \in \mathcal{P}(Y)$. Si $(\pi_n) \subset \Pi(\mu, \nu)$ y $\pi_n \rightarrow \pi$ en $\mathcal{P}(X \times Y)$, entonces $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\varphi \in C_b(X)$. La función $(x, y) \mapsto \varphi(x)$ pertenece a $C_b(X \times Y)$, de modo que, por la convergencia débil y la definición de medida imagen,

$$\int_X \varphi d(\mathbf{p}_1)_\# \pi = \int_{X \times Y} \varphi(x) d\pi(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} \varphi(x) d\pi_n(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X \varphi d\mu = \int_X \varphi d\mu.$$

Como esto vale para toda $\varphi \in C_b(X)$, el Lema 2.3.7 da $(\mathbf{p}_1)_\# \pi = \mu$. Análogamente, $(\mathbf{p}_2)_\# \pi = \nu$. $\square$

Llegamos finalmente al principal objetivo de este capítulo. Los resultados desarrollados en las secciones anteriores permiten aplicar el método directo del cálculo de variaciones al problema de Kantorovich. Como consecuencia, obtenemos el siguiente teorema de existencia, uno de los pilares fundamentales de la teoría del transporte óptimo.

TEOREMA 2.3.9 (Existencia de planes óptimos). Sean X e Y espacios métricos completos y separables, sean

$$\mu \in \mathcal{P}(X), \quad \nu \in \mathcal{P}(Y),$$

y sea

$$c: X \times Y \rightarrow [0, \infty)$$

una función semicontinua inferior. Entonces existe un plan de transporte óptimo, es decir, existe

$$\pi^* \in \Pi(\mu, \nu)$$

tal que

$$\mathcal{K}(\pi^*) = \min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathcal{K}(\pi).$$

DEMOSTRACIÓN. Como $\Pi(\mu, \nu)$ es no vacío, existe una sucesión minimizante

$$(\pi_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Pi(\mu, \nu).$$

Por el Corolario 2.3.1, existe una subsucesión, que denotaremos nuevamente por (π_n) , y una medida $\pi^* \in \mathcal{P}(X \times Y)$ tales que

$$\pi_n \rightharpoonup \pi^*,$$

y por el Lema 2.3.8, $\pi^* \in \Pi(\mu, \nu)$. Finalmente, por la semicontinuidad inferior del funcional de Kantorovich,

$$\mathcal{K}(\pi^*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{K}(\pi_n) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathcal{K}(\pi),$$

lo que implica que π^* es un plan de transporte óptimo. $\square$

Ejercicios

EJERCICIO 2.1 (Convergencia débil: ejemplos). Decidir si las siguientes sucesiones convergen débilmente en $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ y, en caso afirmativo, hallar el límite:

$$(a) \delta_{1/n}; \quad (b) \delta_n; \quad (c) \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_{1/n}; \quad (d) \mathcal{L}^1|_{[0, 1-1/n] \cdot \frac{n}{n-1}}; \quad (e) n \mathcal{L}^1|_{[0, 1/n]}; \quad (f) \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{k/n}.$$

En (b), probar que ninguna subsucesión converge débilmente a una medida de probabilidad, y relacionarlo con la falta de ajuste (*tightness*).

EJERCICIO 2.2 (Continuidad del push-forward). Sean X, Y espacios métricos y $T: X \rightarrow Y$ continua.

- (a) Probar que si $\mu_n \rightharpoonup \mu$ en $\mathcal{P}(X)$ entonces $T_{\#}\mu_n \rightharpoonup T_{\#}\mu$ en $\mathcal{P}(Y)$.
- (b) Concluir que si $\mu_m = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta_{x_j}$ converge débilmente a μ (por ejemplo, si los x_j son muestras independientes de μ , por la ley de los grandes números), entonces $\frac{1}{m} \sum_j \delta_{T(x_j)} \rightharpoonup T_{\#}\mu$: “los mapas de transporte mandan muestras en muestras”.
- (c) Mostrar con un ejemplo que (a) falla si T es sólo medible.

EJERCICIO 2.3 (Los mapas no son compactos). (a) Construir una sucesión $f_n: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $(f_n)_{\#}\mathcal{L}^1|_{[0, 1]} = \mathcal{L}^1|_{[0, 1]}$ para todo n y $f_n \rightharpoonup \frac{1}{2}$ débilmente en $L^2(0, 1)$, es decir, $\int f_n g \rightarrow \frac{1}{2} \int g$ para toda $g \in L^2(0, 1)$. *Sugerencia*: funciones “diente de sierra” de período $1/n$.

- (b) Sea $\pi_n = (\text{id}, f_n)_{\#}\mathcal{L}^1|_{[0, 1]}$. Probar que $\pi_n \rightharpoonup \mathcal{L}^1|_{[0, 1]} \otimes \mathcal{L}^1|_{[0, 1]}$, que no está inducido por ningún mapa. Concluir que el conjunto de planes inducidos por mapas no es débilmente cerrado, y comentar por qué esto obstruye el método directo para el problema de Monge.
- (c) ¿Es posible elegir las f_n de clase C^1 ?

EJERCICIO 2.4 (La variación total no sirve). La distancia de variación total en $\mathcal{P}(Z)$ es $\|\alpha - \beta\|_{TV} = \sup_A |\alpha(A) - \beta(A)|$. Sea $\mu = \mathcal{L}^1|_{[0, 1]}$ y $\pi_n = (\text{id}, T_n)_{\#}\mu$ con $T_n(x) = x + \frac{1}{n}$ (mód 1). Probar que $\pi_n \in \Pi(\mu, \mu)$, que $\|\pi_n - \pi_m\|_{TV} = 1$ para $n \neq m$, y concluir que $\Pi(\mu, \mu)$ no es compacto para la variación total, aunque sí lo es para la topología débil (Corolario 2.3.1). ¿A qué converge débilmente π_n ?

EJERCICIO 2.5 (Regularización de Moreau–Yosida). Sea (X, d) un espacio métrico y $g: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propia (no idénticamente $+\infty$) y acotada inferiormente. Para $k \geq 0$ se define

$$g_k(x) = \inf_{y \in X} \{g(y) + k d(x, y)\}.$$

- (a) Probar que g_k es finita, k -Lipschitz, $g_k \leq g$ y $g_k \geq \inf g$.
- (b) Si además g es semicontinua inferiormente, probar que $g_k(x) \nearrow g(x)$ para todo x cuando $k \rightarrow \infty$.
- (c) Deducir que toda función semicontinua inferiormente y acotada inferiormente en un espacio métrico es límite puntual creciente de una sucesión de funciones Lipschitz y acotadas ($\min\{g_k, k\}$).

EJERCICIO 2.6 (Integrales de funciones semicontinuas). Sea X un espacio métrico, $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente y acotada inferiormente, y $\mu \in \mathcal{P}(X)$.

- (a) Probar que $\int_X f d\mu = \sup\{\int_X g d\mu : g \in C_b(X), g \leq f\}$. *Sugerencia:* Ejercicio 2.5 y convergencia monótona.
- (b) Deducir de (a) el Teorema 2.3.6: si $\pi_n \rightarrow \pi$ en $\mathcal{P}(X \times Y)$ y c es semicontinua inferiormente y acotada inferiormente, entonces $\int c d\pi \leq \liminf_n \int c d\pi_n$.
- (c) Mostrar con un ejemplo que la semicontinuidad inferior del funcional de Kantorovich falla si c es sólo medible y acotada.

EJERCICIO 2.7 (Estabilidad de los planes óptimos). Sean X, Y compactos, $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, y $c_n, c: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ continuas con $c_n \rightarrow c$ uniformemente. Sea γ_n un plan óptimo para c_n .

- (a) Probar que toda subsucesión de (γ_n) tiene una subsucesión que converge débilmente a un plan γ óptimo para c , y que $\min_{\Pi(\mu, \nu)} \int c_n d\gamma \rightarrow \min_{\Pi(\mu, \nu)} \int c d\gamma$.
- (b) Aplicarlo a $c_\varepsilon(x, y) = |x - y|^{1+\varepsilon}$ y a $c_\varepsilon(x, y) = \sqrt{\varepsilon^2 + |x - y|^2}$ con $\varepsilon \rightarrow 0$: los planes óptimos convergen, salvo subsucesión, a planes óptimos para $|x - y|$. Como para $|x - y|$ el plan óptimo no es único en general, estos límites *seleccionan* planes óptimos particulares; ¿qué se puede decir del límite $\varepsilon \rightarrow \infty$ en el segundo caso, una vez normalizado el costo?
- (c) (★) Si μ y ν tienen soportes disjuntos y $\mu \ll \mathcal{L}^d$, el límite en (b) es único y es el plan “monótono a lo largo de rayos”; ver [19, Sec. 3.1].

EJERCICIO 2.8 (★ La convergencia débil es metrizable). Sea X un espacio métrico completo y separable. Probar que existe una métrica d en $\mathcal{P}(X)$ tal que $\mu_n \rightarrow \mu$ si y sólo si $d(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$. *Sugerencia:* tomar una sucesión $(g_k) \subset C_b(X)$ densa en un sentido adecuado (por ejemplo, densa en $\text{Lip}_b(X)$ para la convergencia uniforme sobre compactos) y definir $d(\mu, \nu) = \sum_k 2^{-k} \min\{1, |\int g_k d\mu - \int g_k d\nu|\}$; ver [3, Sec. 5.1]. Compárese con la métrica W_p del Capítulo 10, que metriza la convergencia débil junto con la de los momentos.

Ejercicios computacionales. Los ejercicios siguientes se resuelven con el cuaderno *Monge y Kantorovich*, que acompaña los Capítulos 1 y 2 (véase el Apéndice E); los enunciados figuran también al final del cuaderno. Las referencias a secciones son a las del cuaderno.

EJERCICIO 2.9 (Asignación y Kantorovich). Para n puntos con masas uniformes, verificar que el solver exacto (`ot.emd`) devuelve siempre una matriz de permutación

dividida por n y que su costo coincide con el del problema de asignación resuelto con la rutina de SciPy, como predice el teorema de Birkhoff (Ejercicio 1.11). Para masas genéricas, contar las entradas no nulas del plan óptimo y comprobar la cota $n + m - 1$. Construir un ejemplo con $n = m = 3$ en el que el plan óptimo tenga exactamente 5 entradas no nulas, y otro en el que tenga menos.

EJERCICIO 2.10 (El segmento $\Pi(\mu, \nu)$). Para $\mu = \nu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ y los costos $c = |x - y|^2$, $c = \mathbf{1}_{\{x \neq y\}}$ y $c = -|x - y|^2$, graficar el costo como función del parámetro t que recorre el segmento $\Pi(\mu, \nu)$ e identificar todos los planes óptimos en cada caso. ¿Para qué costo son óptimos todos los planes?

EJERCICIO 2.11 (Birkhoff). Generar una matriz biestocástica M como combinación convexa aleatoria de cinco matrices de permutación. Para un costo aleatorio C , comprobar que el plan óptimo del programa lineal es una permutación y que $\langle C, M \rangle$ es estrictamente mayor que el óptimo (salvo coincidencias). Implementar la descomposición de Birkhoff: encontrar una permutación σ con $M_{i\sigma(i)} > 0$ para todo i (resolver un problema de asignación con costo $-\log M$), restar $t M(\sigma)$ con $t = \min_i M_{i\sigma(i)}$ y repetir hasta llegar a cero. ¿Cuántas permutaciones aparecen?

EJERCICIO 2.12 (Costos cóncavos). Con las dos densidades superpuestas de la Sección 5 del cuaderno, calcular la masa que el plan óptimo de $|x - y|^p$ deja en la diagonal $\{y = x\}$ como función de $p \in (0, 2]$ y graficarla. Explicar el salto en $p = 1$ usando la Proposición 8.4.3 y el Ejercicio 8.5.

EJERCICIO 2.13 (Convergencia débil de planes). Con las funciones “diente de sierra” f_n del Ejercicio 2.3, verificar numéricamente que $\int_0^1 \phi(x) \psi(f_n(x)) dx \rightarrow \int_0^1 \phi \int_0^1 \psi$ para varias ϕ, ψ continuas (por ejemplo, polinomios y senos). Repetir con $f_n(x) = x + \frac{1}{n}$ mód 1: ¿a qué plan convergen ahora los $\pi_n = (\text{id}, f_n)_\# \mathcal{L}^1_{[0,1]}$? ¿Está inducido por un mapa?

Capítulo 3

Un breve repaso de dualidad en Programación Lineal

La noción de dualidad es uno de los conceptos fundamentales de la programación lineal. A todo problema de programación lineal, llamado *problema primal*, se le puede asociar otro problema de programación lineal, denominado *problema dual*, cuya formulación está estrechamente relacionada con la del problema original. La dualidad establece una profunda relación entre ambos problemas: en particular, el valor de cualquier solución del problema dual proporciona una cota para el valor óptimo del problema primal y, bajo hipótesis adecuadas, ambos problemas tienen el mismo valor óptimo.

En este capítulo repasaremos brevemente estas ideas, con el objetivo de utilizarlas luego para comprender el origen de la dualidad de Kantorovich. En particular, veremos cómo se construye el problema dual a partir del primal y cómo las restricciones del problema dual surgen naturalmente de las variables del problema original.

Finalmente, aplicaremos estas ideas al problema de transporte discreto. Esto permitirá reconocer la formulación dual de Kantorovich como una extensión natural de la dualidad de programación lineal al contexto del transporte óptimo.

3.1. El problema primal y el problema dual

Un problema de programación lineal consiste en optimizar una función lineal sujeta a restricciones lineales. En su forma estándar, podemos escribirlo como

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & c^T x \\ \text{sujeto a} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$.

A este problema se lo denomina *problema primal*. El objetivo consiste en encontrar, entre todos los vectores x que satisfacen las restricciones, aquel que minimiza el costo $c^T x$.

A partir del problema primal se puede construir otro problema de programación lineal, denominado *problema dual*. Para el problema anterior, el dual es

$$\begin{aligned} \text{maximizar} \quad & b^T y \\ \text{sujeto a} \quad & A^T y \leq c, \end{aligned}$$

donde $y \in \mathbb{R}^m$ es el vector de variables duales.

La correspondencia entre ambos problemas es particularmente significativa. Cada una de las m restricciones del problema primal da lugar a una variable dual, mientras

que cada una de las n variables del problema primal da lugar a una restricción del problema dual. De este modo, el problema dual intercambia los papeles de las restricciones y las variables del problema primal.

3.2. Dualidad débil y dualidad fuerte

La relación entre los problemas primal y dual no se limita a la forma en que se construyen. Una de las propiedades fundamentales de la dualidad es que toda solución factible del problema dual proporciona una cota para cualquier solución factible del problema primal.

Consideremos nuevamente el problema primal

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && c^T x \\ &\text{sujeto a} && Ax = b, \\ &&& x \geq 0, \end{aligned}$$

y su problema dual

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && b^T y \\ &\text{sujeto a} && A^T y \leq c. \end{aligned}$$

Supongamos que x es una solución factible del problema primal y que y es una solución factible del problema dual. Entonces

$$A^T y \leq c.$$

Como $x \geq 0$, obtenemos

$$x^T A^T y \leq x^T c.$$

Por otra parte, como $Ax = b$,

$$x^T A^T y = (Ax)^T y = b^T y.$$

Por lo tanto,

$$b^T y \leq c^T x.$$

Hemos demostrado así que el valor de cualquier solución factible del problema dual es menor o igual que el valor de cualquier solución factible del problema primal. En particular,

$$\sup\{b^T y : y \text{ es factible para el dual}\} \leq \inf\{c^T x : x \text{ es factible para el primal}\}.$$

Este resultado se conoce como *dualidad débil*.

La importancia de la dualidad de programación lineal se debe, en particular, a que bajo hipótesis adecuadas esta desigualdad se convierte en una igualdad. El resultado fundamental es el siguiente.

TEOREMA 3.2.1 (Dualidad fuerte en programación lineal). *Si el problema primal admite una solución óptima finita, entonces el problema dual también admite una solución óptima y los valores óptimos coinciden. Es decir,*

$$\min_{\substack{Ax=b \\ x \geq 0}} c^T x = \max_{A^T y \leq c} b^T y.$$

La demostración de este resultado requiere resultados propios de la teoría de programación lineal y queda fuera del alcance de estas notas. Puede consultarse, por ejemplo, [20, Chapter 5].

La dualidad débil tiene una interpretación particularmente útil: el problema dual permite obtener cotas para el valor óptimo del problema primal. La dualidad fuerte afirma que, al resolver el problema dual, estas cotas pueden llegar a ser exactas.

Esta relación será fundamental en el problema de transporte óptimo. En particular, veremos que el problema de Kantorovich discreto es un problema de programación lineal, por lo que su formulación dual y la igualdad entre los valores óptimos se obtienen directamente de estos resultados.

3.3. Una ventaja del problema dual: reducción de la dimensión

Una de las ventajas potenciales de considerar el problema dual es que puede tener una dimensión considerablemente menor que la del problema primal. En general, si el problema primal tiene n variables y m restricciones, el problema dual tiene m variables y n restricciones. Por lo tanto, cuando $m \ll n$, el problema dual puede resultar mucho más pequeño que el problema original.

Consideremos el problema de programación lineal

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \sum_{i=1}^{100} c_i x_i \\ &\text{sujeto a} && \sum_{i=1}^{100} a_i x_i = b, \\ &&& x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, 100, \end{aligned}$$

donde $a_i > 0$ para todo i y $b > 0$.

El problema primal tiene 100 variables y una única restricción de igualdad. Su problema dual tiene, en cambio, una única variable y , asociada a la única restricción del problema primal. El problema dual es

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && by \\ &\text{sujeto a} && a_i y \leq c_i, \quad i = 1, \dots, 100. \end{aligned}$$

Equivalentemente, las restricciones del problema dual pueden escribirse como

$$y \leq \frac{c_i}{a_i}, \quad i = 1, \dots, 100,$$

y, por lo tanto,

$$y \leq \min_{1 \leq i \leq 100} \frac{c_i}{a_i}.$$

Así, el problema dual se reduce a

$$\text{maximizar } by \quad \text{sujeto a} \quad y \leq \min_{1 \leq i \leq 100} \frac{c_i}{a_i}.$$

Su solución óptima es entonces

$$y^* = \min_{1 \leq i \leq 100} \frac{c_i}{a_i},$$

y el valor óptimo del problema dual es

$$b \min_{1 \leq i \leq 100} \frac{c_i}{a_i}.$$

El problema primal también puede resolverse directamente. Sea k un índice para el cual

$$\frac{c_k}{a_k} = \min_{1 \leq i \leq 100} \frac{c_i}{a_i}.$$

Para toda solución factible x se tiene

$$c_i \geq \left(\min_{1 \leq j \leq 100} \frac{c_j}{a_j} \right) a_i,$$

por lo que

$$\sum_{i=1}^{100} c_i x_i \geq \left(\min_{1 \leq j \leq 100} \frac{c_j}{a_j} \right) \sum_{i=1}^{100} a_i x_i = b \min_{1 \leq j \leq 100} \frac{c_j}{a_j}.$$

Esta cota se alcanza tomando

$$x_k = \frac{b}{a_k}, \quad x_i = 0 \quad (i \neq k).$$

En consecuencia, el valor óptimo del problema primal es

$$b \min_{1 \leq i \leq 100} \frac{c_i}{a_i},$$

que coincide con el valor óptimo del problema dual.

Este ejemplo muestra una situación en la que el problema dual tiene una dimensión mucho menor que el problema primal: mientras que el primal tiene 100 variables, el dual tiene solamente una. En problemas de gran tamaño, esta reducción puede resultar computacionalmente significativa.

3.4. Vuelta al problema de Kantorovich: el caso discreto

Veamos ahora cómo se aplica la discusión anterior al problema de transporte óptimo cuando las medidas son discretas. Sean

$$\mu = \sum_{i=1}^N a_i \delta_{x_i}, \quad \nu = \sum_{j=1}^M b_j \delta_{y_j},$$

donde $a_i, b_j \geq 0$ y

$$\sum_{i=1}^N a_i = \sum_{j=1}^M b_j = 1.$$

Un plan de transporte $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ queda completamente determinado por los números

$$\pi_{ij} = \pi(\{(x_i, y_j)\}), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M.$$

Las condiciones sobre las marginales se traducen en

$$\sum_{j=1}^M \pi_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

y

$$\sum_{i=1}^N \pi_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, M,$$

junto con las condiciones $\pi_{ij} \geq 0$.

Si escribimos $c_{ij} = c(x_i, y_j)$, el problema de Kantorovich se convierte entonces en el siguiente problema de programación lineal:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar} && \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij} \pi_{ij} \\ &\text{sujeto a} && \sum_{j=1}^M \pi_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ &&& \sum_{i=1}^N \pi_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, M, \\ &&& \pi_{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, el problema de Kantorovich discreto es, literalmente, un problema de programación lineal. Podemos aplicar entonces la construcción del problema dual que vimos anteriormente.

Para cada una de las restricciones

$$\sum_{j=1}^M \pi_{ij} = a_i$$

introducimos una variable dual φ_i , y para cada una de las restricciones

$$\sum_{i=1}^N \pi_{ij} = b_j$$

introducimos una variable dual ψ_j . El problema dual resulta ser

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i + \sum_{j=1}^M b_j \psi_j \\ &\text{sujeto a} && \varphi_i + \psi_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Observemos que, en este caso, el problema dual tiene $N + M$ variables, mientras que el problema primal tiene NM variables. Cuando N y M son grandes, esta diferencia puede ser considerable:

$$NM \gg N + M.$$

La formulación dual permite así reemplazar las variables π_{ij} , que describen cuánto se transporta entre cada par de puntos, por dos familias de variables φ_i y ψ_j , asociadas respectivamente a los puntos de partida y de llegada.

Finalmente, podemos interpretar las variables duales como funciones definidas sobre los soportes de las medidas:

$$\varphi_i = \varphi(x_i), \quad \psi_j = \psi(y_j).$$

Con esta notación, el problema dual adopta la forma

$$\begin{aligned} &\text{maximizar} && \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu \\ &\text{sujeto a} && \varphi(x_i) + \psi(y_j) \leq c(x_i, y_j), \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Esta última formulación es precisamente la versión discreta del problema dual de Kantorovich. En el caso general, las familias finitas de variables duales $\{\varphi_i\}$ y $\{\psi_j\}$ serán reemplazadas por funciones definidas sobre X e Y , y las restricciones

$$\varphi(x_i) + \psi(y_j) \leq c(x_i, y_j)$$

por la condición

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in X \times Y.$$

La discusión anterior servirá como motivación para la formulación dual del problema de transporte óptimo que introduciremos a continuación. En particular, la formulación discreta sugiere qué estructura cabe esperar en el caso general: las variables duales estarán asociadas a los espacios de partida y de llegada, y la restricción dual involucrará la función de costo.

Ejercicios

- EJERCICIO 3.1 (Duales de distintas formas). (a) Escribir el problema dual de $\min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$ y el de $\min\{c^T x : Ax = b\}$ (sin restricción de signo), reduciéndolos primero a la forma estándar $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ mediante variables de holgura y la descomposición $x = x^+ - x^-$.
- (b) Probar que el dual del dual es el primal.
- (c) Dar un ejemplo en $\mathbb{R}$ (una variable) en el que el primal no sea factible y el dual no sea acotado, y otro en el que ninguno de los dos sea factible. ¿Contradicen estos ejemplos el teorema de dualidad fuerte?

EJERCICIO 3.2 (Holgura complementaria). Sean x factible para el primal $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ e y factible para su dual $\max\{b^T y : A^T y \leq c\}$.

- (a) Probar que $c^T x - b^T y = x^T(c - A^T y)$ y que ambos son óptimos si y sólo si $x_j(c - A^T y)_j = 0$ para todo j .
- (b) Traducirlo al problema de transporte discreto de la Sección 3.4: π y (φ, ψ) factibles son ambos óptimos si y sólo si

$$\pi_{ij} > 0 \implies \varphi_i + \psi_j = c_{ij}.$$

Ésta es la versión discreta de la *condición de saturación* que reaparecerá en los Capítulos 5 y 6.

EJERCICIO 3.3 (Un problema 2×2 a mano). Sean $a = (0,4, 0,6)$, $b = (0,5, 0,5)$ y $c = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- (a) Describir $\Pi(a, b)$ como un segmento (tiene un solo grado de libertad) y hallar el plan óptimo y el costo óptimo.
- (b) Resolver el problema dual y verificar la dualidad fuerte y la holgura complementaria del Ejercicio 3.2.

- (c) Probar que el par óptimo (φ, ψ) es único salvo la transformación $(\varphi + s, \psi - s)$, $s \in \mathbb{R}$, e interpretar esta invariancia.

EJERCICIO 3.4 (Vértices del politopo de transporte). Sean $a \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^M$ con entradas positivas y $\sum a_i = \sum b_j = 1$, y $\Pi(a, b)$ el politopo de planes discretos.

- (a) Probar que $\Pi(a, b)$ es un politopo compacto y convexo de dimensión $(N - 1)(M - 1)$.
 (b) Probar que todo punto extremal π de $\Pi(a, b)$ tiene a lo sumo $N + M - 1$ entradas positivas. *Sugerencia:* el grafo bipartito con aristas $\{(i, j) : \pi_{ij} > 0\}$ no puede contener ciclos (si los contiene, perturbar como en el Ejercicio 1.11), y un bosque con $N + M$ vértices tiene a lo sumo $N + M - 1$ aristas.
 (c) Deducir que el problema de transporte discreto siempre admite un plan óptimo con a lo sumo $N + M - 1$ entradas positivas. (Esta cota se usa en el Capítulo 13 para contrastar con el plan entrópico, que tiene todas sus entradas positivas.)

EJERCICIO 3.5 (El problema de asignación). Sean $N = M$ y $a = b = \frac{1}{N}(1, \dots, 1)$.

- (a) Probar, usando que un programa lineal alcanza su mínimo en un vértice y el teorema de Birkhoff (Ejercicio 1.11), que

$$\min_{\pi \in \Pi(a, b)} \sum_{ij} c_{ij} \pi_{ij} = \frac{1}{N} \min_{\sigma \in S_N} \sum_i c_{i\sigma(i)}.$$

Es decir: para pesos uniformes, el problema de Kantorovich discreto coincide con el problema de Monge (una asignación óptima), aunque el primero tiene N^2 variables continuas y el segundo $N!$ candidatos.

- (b) Escribir el dual del problema de asignación y probar que una permutación σ es óptima si y sólo si existen $\varphi, \psi \in \mathbb{R}^N$ con $\varphi_i + \psi_j \leq c_{ij}$ para todo i, j y $\varphi_i + \psi_{\sigma(i)} = c_{i\sigma(i)}$ para todo i . Interpretar φ_i y ψ_j como precios (problema de asignación de Koopmans–Beckmann).
 (c) Para $c_{ij} = |x_i - y_j|^2$ con $x_1 < \dots < x_N$ e $y_1 < \dots < y_N$ en $\mathbb{R}$, probar directamente que $\sigma = \text{id}$ es óptima (intercambiar dos asignaciones cruzadas no aumenta el costo). Éste es el germen del Capítulo 8.

Capítulo 4

Dualidad

Hasta ahora hemos estudiado el problema de Kantorovich desde el punto de vista del plan de transporte: hemos visto que, bajo hipótesis generales, existe un plan óptimo. Sin embargo, la formulación primal describe la solución mediante una medida sobre $X \times Y$, y no proporciona por sí misma una forma sencilla de caracterizar la estructura de dicho plan. La dualidad ofrece una perspectiva diferente: en lugar de buscar directamente una medida óptima, podemos estudiar funciones definidas sobre los espacios X e Y .

Estas funciones duales no sólo permiten obtener cotas inferiores para el costo de transporte, sino que, cuando se alcanza la igualdad, proporcionan información sobre la estructura de los planes óptimos.

Desde el punto de vista de la optimización, esta formulación dual surge naturalmente porque el problema de Kantorovich es un problema de programación lineal, en el que las restricciones que definen los planes de transporte son lineales.

El teorema de dualidad de Kantorovich constituye uno de los resultados fundamentales de la teoría del transporte óptimo, ya que permite caracterizar el valor óptimo del problema de transporte mediante un problema de maximización sobre una familia adecuada de funciones.

En este capítulo introduciremos el problema dual y estudiaremos su interpretación. Posteriormente demostraremos el teorema de dualidad y analizaremos algunas de sus consecuencias más importantes.

4.1. Dualidad de Kantorovich

Necesitaremos la siguiente caracterización del conjunto de planes de transporte que será utilizada repetidamente a lo largo de este capítulo.

Recordemos que, por el Lema 2.3.7, una medida de probabilidad sobre un espacio métrico queda completamente determinada por sus integrales contra funciones continuas y acotadas.

Con la ayuda del Lema 2.3.7 podemos obtener una caracterización del conjunto $\Pi(\mu, \nu)$.

PROPOSICIÓN 4.1.1. *Sean X e Y espacios métricos. Sean $\mu \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, y $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$. Entonces $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ si y sólo si*

$$\int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) d\pi(x, y) = \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu,$$

para todo par de funciones

$$(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y).$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos primero que $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. Por definición,

$$(\mathbf{p}_1)_\# \pi = \mu, \quad (\mathbf{p}_2)_\# \pi = \nu.$$

Por la definición de medida imagen,

$$\int_{X \times Y} \varphi(x) d\pi(x, y) = \int_X \varphi d\mu \quad \text{y} \quad \int_{X \times Y} \psi(y) d\pi(x, y) = \int_Y \psi d\nu.$$

Sumando ambas igualdades obtenemos la identidad buscada.

Recíprocamente, supongamos que la identidad vale para toda φ y ψ . Tomando $\psi \equiv 0$, obtenemos

$$\int_{X \times Y} \varphi(x) d\pi(x, y) = \int_X \varphi d\mu$$

para toda función $\varphi \in C_b(X)$. Por la definición de medida imagen,

$$\int_X \varphi d(\mathbf{p}_1)_\# \pi = \int_X \varphi d\mu$$

para toda función $\varphi \in C_b(X)$, y por lo tanto, por el Lema 2.3.7,

$$(\mathbf{p}_1)_\# \pi = \mu.$$

De manera análoga, tomando $\varphi \equiv 0$ se obtiene

$$(\mathbf{p}_2)_\# \pi = \nu.$$

En consecuencia, $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. □

Para trabajar con la formulación dual del problema de transporte será útil introducir una notación para la clase de pares de funciones que satisfacen la restricción fundamental

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y).$$

Definimos

$$\mathcal{A}_c := \{(\varphi, \psi) \in L^1(\mu) \times L^1(\nu) : \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y) \text{ para todo } (x, y) \in X \times Y\}.$$

Llamaremos a $\mathcal{A}_c$ la *clase admisible* asociada al costo c .

OBSERVACIÓN 4.1.2. Es importante que la desigualdad de admisibilidad se exija en *todo* punto (x, y) , y no solamente $\mu \otimes \nu$ -c.t.p. La razón es que un conjunto $\mu \otimes \nu$ -nulo no tiene por qué ser π -nulo para un plan $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ arbitrario: por ejemplo, si $\mu = \nu$ es la medida de Lebesgue en $[0, 1]$, la diagonal $\{x = y\}$ es $\mu \otimes \nu$ -nula pero tiene medida uno para el plan $(\text{id}, \text{id})_\# \mu$. Con una definición «c.t.p.» la dualidad débil que demostramos a continuación sería falsa.

Para $(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c$, definimos el funcional

$$\mathcal{D}(\varphi, \psi) := \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu.$$

Por otra parte, recordemos que el funcional de Kantorovich asociado a un plan $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ es

$$\mathcal{K}_c(\pi) := \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y).$$

El siguiente resultado establece la relación fundamental entre ambos funcionales.

TEOREMA 4.1.3 (Dualidad de Kantorovich). *Sean X e Y espacios métricos completos y separables, sean $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\nu \in \mathcal{P}(Y)$, y sea*

$$c : X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$$

una función semicontinua inferiormente.

Entonces

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathcal{K}_c(\pi) = \sup_{(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c} \mathcal{D}(\varphi, \psi).$$

Además, el ínfimo es alcanzado por algún plan de transporte

$$\pi^* \in \Pi(\mu, \nu).$$

Por otra parte, el valor del supremo no cambia si se restringe la clase admisible a pares de funciones continuas y acotadas. Es decir,

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c} \mathcal{D}(\varphi, \psi) = \sup_{(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c \cap C_b} \mathcal{D}(\varphi, \psi),$$

donde $\mathcal{A}_c \cap C_b = \mathcal{A}_c \cap (C_b(X) \times C_b(Y))$.

Antes de demostrar este resultado, resulta conveniente analizar sus consecuencias e interpretar el significado del problema dual. Esto permitirá comprender el papel de las funciones duales y motivará naturalmente la demostración que presentaremos más adelante.

En particular, el problema dual no debe entenderse simplemente como una reformulación alternativa del problema de transporte. Las funciones duales permiten obtener cotas inferiores para el costo de cualquier transporte y, cuando se alcanza la igualdad, proporcionan información sobre la estructura de los planes óptimos.

PROPOSICIÓN 4.1.4 (Dualidad débil). *Se tiene*

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c} \mathcal{D}(\varphi, \psi) \leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathcal{K}_c(\pi).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c$ y sea $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. Por definición de $\mathcal{A}_c$,

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$. Observemos que las funciones $(x, y) \mapsto \varphi(x)$ y $(x, y) \mapsto \psi(y)$ son π -integrables, pues $\int |\varphi(x)| d\pi = \int_X |\varphi| d\mu < \infty$ y análogamente para ψ . Integrando la desigualdad respecto de π obtenemos

$$\int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) d\pi(x, y) \leq \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y).$$

Como π tiene marginales μ y ν ,

$$\int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) d\pi(x, y) = \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu = \mathcal{D}(\varphi, \psi).$$

Por lo tanto,

$$\mathcal{D}(\varphi, \psi) \leq \mathcal{K}_c(\pi).$$

Como la desigualdad vale para todo $(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c$ y todo $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, podemos tomar primero el supremo respecto de (φ, ψ) y luego el ínfimo respecto de π , obteniendo

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c} \mathcal{D}(\varphi, \psi) \leq \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathcal{K}_c(\pi).$$

□

Esta desigualdad tiene una interpretación importante. Cada par admisible (φ, ψ) proporciona una cota inferior para el costo de cualquier plan de transporte. En particular, si para algún plan π^* y algún par (φ^*, ψ^*) admisible se alcanza la igualdad

$$\int_{X \times Y} c \, d\pi^* = \int_X \varphi^* \, d\mu + \int_Y \psi^* \, d\nu,$$

entonces π^* es necesariamente un plan óptimo y (φ^*, ψ^*) es un par óptimo para el problema dual. En este sentido, las funciones duales proporcionan un certificado de optimalidad.

Cuando el supremo en el problema dual es alcanzado por un par (φ^*, ψ^*) , diremos que φ^* y ψ^* son *potenciales de Kantorovich*. Es decir, un par de potenciales de Kantorovich es un par admisible que alcanza el valor óptimo del problema dual:

$$\int_X \varphi^* \, d\mu + \int_Y \psi^* \, d\nu = \sup_{(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c} \left\{ \int_X \varphi \, d\mu + \int_Y \psi \, d\nu \right\}.$$

La existencia de potenciales de Kantorovich no está, en general, garantizada únicamente por el teorema de dualidad. En el caso discreto, sin embargo, como veremos más adelante (cf. Capítulo 5), su existencia se sigue de la teoría de programación lineal. En el caso general, el problema de la existencia de potenciales de Kantorovich será estudiado en el Capítulo 6.

4.2. Una demostración formal

Antes de presentar una demostración rigurosa del teorema de dualidad, resulta ilustrativo realizar un cálculo formal que muestra cómo aparece naturalmente la formulación dual.

La idea consiste en reescribir el problema de Kantorovich como un problema de minimización sin restricciones y, posteriormente, intercambiar formalmente las operaciones de ínfimo y supremo. Aunque este argumento no constituye una demostración, permite comprender de manera transparente el origen de la formulación dual y anticipa algunas de las ideas que aparecerán en la demostración rigurosa.

Recordemos que

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathcal{K}_c(\pi) = \inf_{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)} \left\{ \mathcal{K}_c(\pi) + I_{\Pi(\mu, \nu)}(\pi) \right\},$$

donde

$$I_{\Pi(\mu, \nu)}(\pi) = \begin{cases} 0, & \pi \in \Pi(\mu, \nu), \\ +\infty, & \pi \notin \Pi(\mu, \nu), \end{cases}$$

es la función característica de $\Pi(\mu, \nu)$.

Como las restricciones que definen el conjunto de planes de transporte son lineales, la función característica puede escribirse formalmente como

$$I_{\Pi(\mu, \nu)}(\pi) = \sup_{(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) d\pi \right\}.$$

En efecto, si $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, la expresión entre llaves es idénticamente igual a cero para todo (φ, ψ) .

Si, en cambio, $\pi \notin \Pi(\mu, \nu)$, alguna de las dos marginales de π no coincide con la correspondiente medida prescrita. Por la caracterización de las medidas mediante integrales de funciones continuas acotadas, existe entonces un par

$$(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)$$

tal que

$$\int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) d\pi(x, y) > 0.$$

Multiplicando ahora φ y ψ por una constante $t > 0$, la expresión anterior se multiplica por t . Por lo tanto, haciendo $t \rightarrow +\infty$, el supremo es $+\infty$. Así,

$$I_{\Pi(\mu, \nu)}(\pi) = \sup_{(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) d\pi(x, y) \right\}.$$

En consecuencia, podemos escribir formalmente

$$\inf_{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)} \sup_{(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)} \left\{ \int c d\pi + \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu - \int_{X \times Y} (\varphi + \psi) d\pi \right\}.$$

Suponiendo ahora que es posible intercambiar formalmente las operaciones de ínfimo y supremo, obtenemos

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu + \inf_{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)} \int_{X \times Y} (c(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)) d\pi \right\}.$$

Para calcular el ínfimo anterior, observemos que para toda medida de probabilidad π se tiene

$$\int_{X \times Y} (c - \varphi - \psi) d\pi \geq \inf_{(x, y) \in X \times Y} \{c(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)\}.$$

Por otra parte, tomando como π una medida de Dirac $\delta_{(x, y)}$, obtenemos

$$\int_{X \times Y} (c - \varphi - \psi) d\delta_{(x, y)} = c(x, y) - \varphi(x) - \psi(y).$$

Por lo tanto,

$$\inf_{\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)} \int_{X \times Y} (c - \varphi - \psi) d\pi = \inf_{(x, y) \in X \times Y} \{c(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)\}.$$

Definamos, para cada par $(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)$,

$$m(\varphi, \psi) = \inf_{(x, y) \in X \times Y} \{c(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)\}.$$

El cálculo formal obtenido hasta aquí es entonces

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in C_b(X) \times C_b(Y)} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu + m(\varphi, \psi) \right\}.$$

Veamos ahora que, sin pérdida de generalidad, podemos asumir que

$$m(\varphi, \psi) = 0,$$

de modo que, en particular, el par resultante pertenece a $\mathcal{A}_c \cap C_b$.

En efecto, dado

$$m = m(\varphi, \psi) = \inf_{(x, y) \in X \times Y} \{c(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)\},$$

consideremos

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \frac{m}{2}, \quad \tilde{\psi} = \psi + \frac{m}{2}.$$

Entonces

$$c - \tilde{\varphi} - \tilde{\psi} = c - \varphi - \psi - m,$$

y, por lo tanto,

$$m(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = m - m = 0.$$

Al mismo tiempo,

$$\int_X \tilde{\varphi} d\mu + \int_Y \tilde{\psi} d\nu = \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu + m.$$

En consecuencia,

$$\int_X \tilde{\varphi} d\mu + \int_Y \tilde{\psi} d\nu + m(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}) = \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu + m(\varphi, \psi).$$

Es decir, el valor del funcional no cambia al realizar este desplazamiento, independientemente del signo de m .

Así, el cálculo formal conduce a

$$\sup_{(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c \cap C_b} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu \right\}.$$

Este es precisamente el problema dual de Kantorovich.

Observemos además que esta normalización muestra por qué, en el problema dual, la restricción

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$$

debe entenderse como una restricción que se satura en el óptimo: si

$$\inf_{(x, y) \in X \times Y} \{c(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)\} > 0,$$

podemos aumentar simultáneamente φ y ψ sin perder la admisibilidad y mejorar estrictamente el valor del funcional. Por lo tanto, en un par óptimo necesariamente se tiene

$$\inf_{(x, y) \in X \times Y} \{c(x, y) - \varphi(x) - \psi(y)\} = 0.$$

Cuando el ínfimo se alcanza, esto significa que existe algún $(x_0, y_0) \in X \times Y$ tal que

$$\varphi(x_0) + \psi(y_0) = c(x_0, y_0).$$

4.3. El problema del transportista

La formulación dual admite una interpretación económica muy ilustrativa, que se atribuye a Luis Caffarelli.

Supongamos que una empresa dispone de varias minas desde las cuales debe transportar una cierta cantidad de mercancía hacia un conjunto de fábricas. La cantidad disponible en cada mina y la demanda de cada fábrica están fijadas. Si el costo de transportar una unidad de mercancía desde la mina x hasta la fábrica y es $c(x, y)$, el problema consiste en organizar el transporte de manera que el costo total sea mínimo. Este es precisamente el problema de Monge–Kantorovich.

Supongamos ahora que un transportista propone hacerse cargo de toda la distribución. En lugar de cobrar directamente el costo de cada envío, establece un precio $\varphi(x)$ por retirar una unidad de mercancía de la mina x y un precio $\psi(y)$ por entregarla en la fábrica y .

Para que resulte conveniente contratar sus servicios, el costo total que cobra por transportar una unidad desde x hasta y no puede exceder el costo directo del transporte. Es decir, debe verificarse

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y), \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Bajo esta restricción, el beneficio total del transportista viene dado por

$$\int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu,$$

que coincide exactamente con el funcional que aparece en el problema dual.

El teorema de dualidad de Kantorovich afirma entonces que un transportista que elige óptimamente los precios puede obtener un beneficio máximo igual al mínimo costo necesario para realizar el transporte. En otras palabras, el valor óptimo del problema dual coincide con el valor óptimo del problema de transporte.

La demostración formal presentada en la sección anterior no es exclusiva del problema de transporte óptimo. En realidad, constituye una manifestación de un fenómeno mucho más general: la dualidad en programación lineal. El siguiente ejercicio propone recuperar la conocida relación de dualidad en dimensión finita mediante un argumento análogo al utilizado anteriormente.

EJERCICIO 4.3.1. Sea $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}^n$. Demostrar, utilizando un principio minimax, que

$$\sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ Ax \leq b}} c \cdot x = \inf_{\substack{y \in \mathbb{R}^m \\ y \geq 0, A^T y = c}} b \cdot y.$$

La analogía entre este resultado y la dualidad de Kantorovich no es casual. De hecho, Kantorovich es considerado uno de los fundadores de la programación lineal. El problema dual del transporte óptimo puede interpretarse como una generalización a dimensión infinita de la dualidad clásica de programación lineal.

4.4. Demostración del teorema de dualidad

Con el fin de simplificar la exposición, demostraremos el teorema bajo la hipótesis adicional de que los espacios X e Y son compactos y que el costo c es continuo.

La demostración general, válida para espacios métricos completos separables y costo semicontinuo inferior, requiere argumentos de aproximación adicionales: se aproxima el costo por costos continuos acotados, se obtiene la dualidad para cada aproximación, y se pasa al límite. El detalle de este argumento puede consultarse en [21, Theorem 1.3] o en [19, Theorem 1.39]. La estrategia es en todos los casos la misma.

La prueba se basa en un principio minimax proveniente del análisis convexo, conocido como el teorema de dualidad de Fenchel–Rockafellar.

Sea E un espacio normado y sea

$$\Theta : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

una función convexa.

Recordemos que la convexidad significa que

$$\Theta(\lambda z_1 + (1 - \lambda)z_2) \leq \lambda\Theta(z_1) + (1 - \lambda)\Theta(z_2),$$

para todo $z_1, z_2 \in E$ y todo $\lambda \in [0, 1]$.

DEFINICIÓN 4.4.1. La transformada de Legendre–Fenchel de Θ es la función

$$\Theta^* : E^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

definida por

$$\Theta^*(z^*) = \sup_{z \in E} \{\langle z^*, z \rangle - \Theta(z)\}.$$

El resultado que utilizaremos es el siguiente.

TEOREMA 4.4.2 (Fenchel–Rockafellar). *Sean $\Theta, \Xi : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ funciones convexas. Supongamos que existe $z_0 \in E$ tal que*

$$\Theta(z_0) < +\infty, \quad \Xi(z_0) < +\infty,$$

y además Θ es continua en z_0 . Entonces

$$\inf_{z \in E} (\Theta(z) + \Xi(z)) = \max_{z^* \in E^*} (-\Theta^*(-z^*) - \Xi^*(z^*)).$$

La demostración de este resultado puede verse en el Apéndice B.

Pasemos ahora a la demostración de la dualidad de Kantorovich en el caso compacto.

Sea $E = C(X \times Y)$, dotado de la norma del supremo. Como $X \times Y$ es compacto, por el teorema de representación de Riesz el dual topológico de E puede identificarse con el espacio de las medidas de Radon con signo, $E^* = \mathcal{M}(X \times Y)$.

Definimos ahora dos funcionales convexos sobre E .

En primer lugar,

$$\Theta(u) = \begin{cases} 0, & u(x, y) \geq -c(x, y), \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

En segundo lugar,

$$\Xi(u) = \begin{cases} \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu, & u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y), \\ +\infty, & \text{si } u \text{ no puede escribirse de esa forma.} \end{cases}$$

Debe verificarse que Ξ está bien definida. En efecto, si

$$\varphi(x) + \psi(y) = \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\psi}(y),$$

para todo (x, y) , entonces necesariamente existe una constante $s \in \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{\varphi} = \varphi + s, \quad \tilde{\psi} = \psi - s,$$

y por lo tanto

$$\int_X \tilde{\varphi} d\mu + \int_Y \tilde{\psi} d\nu = \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu.$$

Además, las hipótesis del teorema de Fenchel–Rockafellar se satisfacen tomando, por ejemplo,

$$u \equiv 1.$$

Por consiguiente,

$$\inf_{u \in E} (\Theta(u) + \Xi(u)) = \max_{\pi \in M(X \times Y)} (-\Theta^*(-\pi) - \Xi^*(\pi)).$$

Nuestro objetivo es calcular explícitamente los transformados de Legendre–Fenchel de los funcionales Θ y Ξ .

Comencemos con Θ .

Sea $\pi \in M(X \times Y)$. Entonces

$$\Theta^*(-\pi) = \sup_{u \in C(X \times Y)} \left\{ - \int_{X \times Y} u d\pi ; u \geq -c \right\}.$$

Equivalentemente,

$$\Theta^*(-\pi) = \sup_{u \in C(X \times Y)} \left\{ \int_{X \times Y} u d\pi ; u \leq c \right\}.$$

Analicemos dos casos.

Caso 1. $\pi \notin \mathcal{M}_+(X \times Y)$.

Entonces existe una función continua $v \leq 0$ tal que

$$\int_{X \times Y} v d\pi > 0.$$

Como $v \leq 0$, para todo $\lambda > 0$ se tiene

$$\lambda v \leq 0 \leq c,$$

y por lo tanto λv es admisible en el supremo anterior.

De aquí obtenemos

$$\Theta^*(-\pi) \geq \lambda \int_{X \times Y} v d\pi.$$

Haciendo tender $\lambda \rightarrow +\infty$ concluimos que

$$\Theta^*(-\pi) = +\infty.$$

Caso 2. $\pi \in \mathcal{M}_+(X \times Y)$.

En este caso, para toda función continua $u \leq c$ se verifica

$$\int_{X \times Y} u \, d\pi \leq \int_{X \times Y} c \, d\pi.$$

Además, como c es continua sobre el compacto $X \times Y$, podemos tomar una sucesión de funciones continuas

$$u_n = c - \frac{1}{n},$$

que satisfacen $u_n \leq c$ y convergen uniformemente a c . En consecuencia,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{X \times Y} u_n \, d\pi = \int_{X \times Y} c \, d\pi.$$

Por lo tanto,

$$\Theta^*(-\pi) = \int_{X \times Y} c(x, y) \, d\pi(x, y).$$

Resumiendo,

$$\Theta^*(-\pi) = \begin{cases} \int_{X \times Y} c \, d\pi, & \pi \in M_+(X \times Y), \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Calculemos ahora el transformado de Legendre–Fenchel de Ξ .

Por definición,

$$\Xi^*(\pi) = \sup_{u \in C(X \times Y)} \left\{ \int_{X \times Y} u \, d\pi - \Xi(u) \right\}.$$

Como $\Xi(u) = +\infty$ salvo cuando $u(x, y) = \varphi(x) + \psi(y)$, resulta

$$\Xi^*(\pi) = \sup_{\varphi, \psi} \left\{ \int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) \, d\pi - \int_X \varphi \, d\mu - \int_Y \psi \, d\nu \right\},$$

donde el supremo se toma sobre todas las funciones continuas

$$\varphi \in C(X), \quad \psi \in C(Y).$$

Si π tiene marginales μ y ν —en particular, si $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ —, la definición de medida imagen (que vale palabra por palabra para medidas con signo) implica que

$$\int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) \, d\pi = \int_X \varphi \, d\mu + \int_Y \psi \, d\nu,$$

para todo par (φ, ψ) . En consecuencia,

$$\Xi^*(\pi) = 0.$$

Por otra parte, si alguna de las marginales de π no coincide con la medida prescrita, el Lema 2.3.7 (aplicado a las partes positiva y negativa de la diferencia) muestra que existe un par (φ, ψ) para el cual

$$\int_{X \times Y} (\varphi + \psi) \, d\pi - \int_X \varphi \, d\mu - \int_Y \psi \, d\nu \neq 0.$$

Multiplicando ese par por un escalar arbitrariamente grande concluimos que

$$\Xi^*(\pi) = +\infty.$$

Por lo tanto,

$$\Xi^*(\pi) = \begin{cases} 0, & (\mathbf{p}_1)_\# \pi = \mu, (\mathbf{p}_2)_\# \pi = \nu, \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sustituyendo las expresiones obtenidas para los transformados de Legendre–Fenchel en el teorema de Fenchel–Rockafellar obtenemos

$$\inf_{u \in E} (\Theta(u) + \Xi(u)) = \max_{\pi \in M(X \times Y)} (-\Theta^*(-\pi) - \Xi^*(\pi)).$$

Analicemos ambos miembros de esta igualdad.

Por definición de Θ y Ξ , el miembro izquierdo vale

$$\inf \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu ; \varphi(x) + \psi(y) \geq -c(x, y) \right\}.$$

Multiplicando por -1 y sustituyendo

$$\tilde{\varphi} = -\varphi, \quad \tilde{\psi} = -\psi,$$

obtenemos

$$-\sup \left\{ \int_X \tilde{\varphi} d\mu + \int_Y \tilde{\psi} d\nu ; \tilde{\varphi}(x) + \tilde{\psi}(y) \leq c(x, y) \right\}.$$

Por otra parte, el miembro derecho es

$$\max_{\pi \in M(X \times Y)} (-\Theta^*(-\pi) - \Xi^*(\pi)).$$

Como

$$\Theta^*(-\pi) = \begin{cases} \int_{X \times Y} c d\pi, & \pi \in M_+(X \times Y), \\ +\infty, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y

$$\Xi^*(\pi) = \begin{cases} 0, & \pi \in \Pi(\mu, \nu), \\ +\infty, & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

el máximo sólo puede alcanzarse sobre medidas *positivas* con marginales μ y ν , es decir, sobre $\Pi(\mu, \nu)$, y resulta

$$-\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y).$$

Finalmente, multiplicando ambos miembros por -1 concluimos que

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi(x, y) = \max_{\substack{\varphi \in C(X), \psi \in C(Y) \\ \varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)}} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu \right\},$$

es decir, el mínimo del problema de Kantorovich coincide con el máximo del funcional dual sobre pares de funciones *continuas* admisibles.

Para concluir, observemos que $C(X) \times C(Y) \cap \mathcal{A}_c \subset \mathcal{A}_c$, de modo que $\sup_{\mathcal{A}_c} \mathcal{D}$ es mayor o igual que el máximo anterior; y que, por la dualidad débil, $\sup_{\mathcal{A}_c} \mathcal{D} \leq \min_{\Pi(\mu, \nu)} \mathcal{K}_c$. Por lo tanto los tres valores coinciden, lo que prueba simultáneamente la igualdad $\inf \mathcal{K}_c = \sup_{\mathcal{A}_c} \mathcal{D}$ y que el supremo no cambia al restringirse a funciones

continuas. Esto completa la demostración del teorema de dualidad en el caso en que X e Y son compactos y el costo c es continuo. $\square$

COROLARIO 4.4.3 (Condición de saturación). *Supongamos que $\pi^* \in \Pi(\mu, \nu)$ es un plan óptimo y que (φ^*, ψ^*) es un par óptimo para el problema dual. Entonces*

$$\varphi^*(x) + \psi^*(y) = c(x, y) \quad \pi^*\text{-c.t.p.}$$

Es decir, el soporte de un plan óptimo está, salvo un conjunto de π^ -medida nula, contenido en el conjunto de saturación*

$$\{(x, y) \in X \times Y : \varphi^*(x) + \psi^*(y) = c(x, y)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por dualidad,

$$\int_{X \times Y} c \, d\pi^* = \int_X \varphi^* \, d\mu + \int_Y \psi^* \, d\nu.$$

Como (φ^*, ψ^*) es admisible,

$$\varphi^*(x) + \psi^*(y) \leq c(x, y).$$

Usando la caracterización de los planes de transporte,

$$\int_X \varphi^* \, d\mu + \int_Y \psi^* \, d\nu = \int_{X \times Y} (\varphi^*(x) + \psi^*(y)) \, d\pi^*.$$

Por lo tanto,

$$\int_{X \times Y} (c(x, y) - \varphi^*(x) - \psi^*(y)) \, d\pi^*(x, y) = 0.$$

Como el integrando es no negativo, debe ser nulo π^* -c.t.p., lo que da la conclusión. $\square$

Esta condición de saturación es fundamental para comprender la estructura de los planes óptimos y el papel de los potenciales de Kantorovich; la utilizaremos sistemáticamente a partir del Capítulo 6.

Ejercicios

EJERCICIO 4.1 (Desigualdades “casi en todo punto” y planes). Sean $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ y c, ϕ, ψ funciones medibles.

- Supongamos que existen $N \subset X$ y $M \subset Y$ con $\mu(N) = \nu(M) = 0$ tales que $\phi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$ para todo $x \notin N$ y todo $y \notin M$. Probar que $\phi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$ para π -casi todo (x, y) .
- Mostrar que la conclusión es *falsa* si sólo se supone que la desigualdad vale $(\mu \otimes \nu)$ -c.t.p.: tomar $X = Y = [0, 1]$, $\mu = \nu = \mathcal{L}^1$, $c = \mathbf{1}_{\{x \neq y\}}$, $\phi = \psi = \frac{1}{2}$ y $\pi = (\text{id}, \text{id})_{\#} \mu$.
- Explicar por qué (b) obliga a definir la clase admisible $\mathcal{A}_c$ con la desigualdad en *todo* punto, y qué fallaría en la dualidad débil (Proposición 4.1.4) con una definición “c.t.p.”.

EJERCICIO 4.2 (Dualidad a mano). Sean $\mu = \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$ y $\nu = \mathcal{L}^1|_{[1,2]}$.

- Para $c(x, y) = |x - y|$, probar que $(\varphi, \psi) = (-x, y)$ es admisible y que el plan $\pi = (\text{id}, T)_{\#} \mu$ con $T(x) = x + 1$ tiene costo igual a $\mathcal{D}(\varphi, \psi)$. Concluir que ambos son óptimos y que el costo óptimo es 1. ¿Hay otros planes óptimos?

- (b) Para $c(x, y) = |x - y|^2$, hallar un par admisible (φ, ψ) que sature en el gráfico de T (buscar ψ afín) y concluir que T es óptimo también para el costo cuadrático. ¿Es único el plan óptimo en este caso?
- (c) Interpretar φ y ψ en términos del problema del transportista (precios de carga y descarga) de este capítulo. Observar que en (a) *todo* plan de $\Pi(\mu, \nu)$ es óptimo; explicar por qué.

EJERCICIO 4.3 (Funciones semicontinuas y medidas signadas). Sea X un espacio métrico compacto y $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ semicontinua inferiormente y acotada inferiormente. Para una medida de Borel signada finita μ probar que

$$\sup \left\{ \int_X g \, d\mu : g \in C_b(X), g \leq f \right\} = \begin{cases} \int_X f \, d\mu, & \text{si } \mu \geq 0, \\ +\infty, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sugerencia: para la primera alternativa usar el Ejercicio 2.6; para la segunda, la descomposición de Hahn de μ y funciones continuas que aproximen a $-k \mathbf{1}_A$ sobre un conjunto A con $\mu(A) < 0$. Este cálculo es el que identifica la transformada de Legendre–Fenchel de la restricción $\varphi \oplus \psi \leq c$ en la demostración del Teorema 4.1.3.

EJERCICIO 4.4 (★ Dualidad para costos semicontinuos inferiores). En la Sección 4.4 se demuestra el Teorema 4.1.3 para X, Y compactos y c continua. Extenderlo a $c: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$ semicontinua inferiormente, con X, Y compactos, siguiendo estos pasos.

- (a) Por el Ejercicio 2.5, existen $c_k \in C(X \times Y)$ con $c_k \nearrow c$. Sean π_k planes óptimos para c_k . Probar que toda subsucesión de (π_k) tiene una subsucesión convergente a un plan π y que, para todo k_0 fijo, $\int c_{k_0} \, d\pi \leq \lim_k \min_{\Pi} \int c_k \, d\gamma$. Deducir, con convergencia monótona, que $\int c \, d\pi \leq \lim_k \min_{\Pi} \int c_k \, d\gamma$, y por lo tanto que $\min_{\Pi} \int c_k \, d\gamma \nearrow \min_{\Pi} \int c \, d\gamma$.
- (b) Probar que $\mathcal{A}_{c_k} \subset \mathcal{A}_c$ y concluir

$$\sup_{\mathcal{A}_c} \mathcal{D} \geq \sup_k \sup_{\mathcal{A}_{c_k}} \mathcal{D} = \sup_k \min_{\Pi} \int c_k \, d\gamma = \min_{\Pi} \int c \, d\gamma \geq \sup_{\mathcal{A}_c} \mathcal{D},$$

donde la última desigualdad es la dualidad débil.

- (c) ¿Qué cambia si X, Y son sólo completos y separables? Consultar [21, Thm. 1.3] o [19, Thm. 1.39].

Potenciales de Kantorovich en el caso discreto

El caso discreto permite ver con especial claridad la naturaleza y el papel de los potenciales de Kantorovich. Como vimos en el capítulo anterior, estos potenciales son las funciones que alcanzan el supremo en el problema dual de Kantorovich. En el caso general, la existencia de tales funciones no es inmediata; en cambio, cuando las medidas son discretas, el problema se reduce a un problema de programación lineal finito y la existencia de una solución óptima del problema dual está garantizada.

En el caso del transporte óptimo, esta relación tiene una interpretación particularmente transparente. Los potenciales de Kantorovich están asociados a los puntos de partida y de llegada, y permiten identificar los pares de puntos entre los cuales puede existir transporte en un plan óptimo.

En este capítulo estudiaremos con más detalle los potenciales de Kantorovich en el caso discreto y veremos qué información proporcionan sobre los planes de transporte óptimos.

5.1. El problema de transporte discreto

Comencemos recordando la formulación discreta del problema de Kantorovich. Consideremos dos medidas de probabilidad discretas $\mu = \sum_{i=1}^N a_i \delta_{x_i}$ y $\nu = \sum_{j=1}^M b_j \delta_{y_j}$, donde $a_i, b_j > 0$ y $\sum_{i=1}^N a_i = \sum_{j=1}^M b_j = 1$.

Un plan de transporte $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ queda completamente determinado por los números $\pi_{ij} = \pi(\{(x_i, y_j)\})$, $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M$.

Las condiciones sobre las marginales se traducen en $\sum_{j=1}^M \pi_{ij} = a_i$, $i = 1, \dots, N$ y $\sum_{i=1}^N \pi_{ij} = b_j$, $j = 1, \dots, M$, junto con las condiciones $\pi_{ij} \geq 0$.

Si escribimos $c_{ij} = c(x_i, y_j)$, el problema de Kantorovich consiste en

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M c_{ij} \pi_{ij} \\ & \text{sujeto a} && \sum_{j=1}^M \pi_{ij} = a_i, \quad i = 1, \dots, N, \\ & && \sum_{i=1}^N \pi_{ij} = b_j, \quad j = 1, \dots, M, \\ & && \pi_{ij} \geq 0. \end{aligned}$$

Como vimos en la sección 3.4, se trata de un problema de programación lineal. Su problema dual es

$$\begin{aligned} & \text{maximizar} && \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i + \sum_{j=1}^M b_j \psi_j \\ & \text{sujeto a} && \varphi_i + \psi_j \leq c_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M. \end{aligned}$$

Los valores φ_i^* y ψ_j^* que maximizan el problema dual son los potenciales de Kantorovich en el caso discreto.

Podemos interpretar estos valores como los valores de dos funciones φ^* y ψ^* definidas sobre los soportes de las medidas:

$$\varphi_i^* = \varphi^*(x_i), \quad \psi_j^* = \psi^*(y_j).$$

En particular, en el caso discreto las funciones φ^* y ψ^* sólo importan a través de sus valores en los puntos

$$\{x_1, \dots, x_N\} = \text{sop}(\mu), \quad \{y_1, \dots, y_M\} = \text{sop}(\nu).$$

En otras palabras, en el caso discreto los potenciales quedan completamente determinados por sus valores sobre los puntos del soporte de las medidas.

5.2. Existencia de potenciales óptimos

En el caso discreto, tanto el problema primal como el problema dual son problemas de programación lineal. En particular, si el problema primal admite una solución óptima, la dualidad fuerte en programación lineal garantiza la existencia de una solución óptima del problema dual.

Por lo tanto, existe un par de potenciales

$$(\varphi^*, \psi^*)$$

que satisface

$$\varphi_i^* + \psi_j^* \leq c_{ij}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M,$$

y para el cual

$$\sum_{i=1}^N a_i \varphi_i^* + \sum_{j=1}^M b_j \psi_j^* = \min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \sum_{i,j} c_{ij} \pi_{ij}.$$

Así, en el caso discreto los potenciales de Kantorovich óptimos existen automáticamente como consecuencia de la teoría de programación lineal.

Esta observación contrasta con el caso general, donde la existencia de potenciales óptimos requiere hipótesis y argumentos adicionales.

5.3. Potenciales y planes óptimos

Supongamos ahora que π^* es un plan de transporte óptimo y que (φ^*, ψ^*) es un par de potenciales óptimos. Por dualidad fuerte,

$$\sum_{i,j} c_{ij} \pi_{ij}^* = \sum_i a_i \varphi_i^* + \sum_j b_j \psi_j^*.$$

Por otro lado, como π^* es un plan de transporte, sus marginales son μ y ν , de modo que

$$\sum_i a_i \varphi_i^* + \sum_j b_j \psi_j^* = \sum_{i,j} (\varphi_i^* + \psi_j^*) \pi_{ij}^*.$$

Por lo tanto,

$$\sum_{i,j} c_{ij} \pi_{ij}^* = \sum_{i,j} (\varphi_i^* + \psi_j^*) \pi_{ij}^*,$$

y obtenemos

$$\sum_{i,j} (c_{ij} - \varphi_i^* - \psi_j^*) \pi_{ij}^* = 0.$$

Ahora bien, cada término de esta suma es no negativo, pues $\pi_{ij}^* \geq 0$ y, por la admisibilidad del par dual, $c_{ij} - \varphi_i^* - \psi_j^* \geq 0$. Por lo tanto, necesariamente

$$\pi_{ij}^* (c_{ij} - \varphi_i^* - \psi_j^*) = 0$$

para todo i, j .

Esta es precisamente la condición de complementariedad de holguras.

5.3.1. El soporte de un plan óptimo. La condición anterior tiene una consecuencia inmediata. Si

$$\varphi_i^* + \psi_j^* < c_{ij},$$

entonces

$$\pi_{ij}^* = 0.$$

Por lo tanto, un plan óptimo sólo puede transportar masa a través de los pares (i, j) para los cuales

$$\varphi_i^* + \psi_j^* = c_{ij}.$$

Definamos

$$\Gamma^* = \{(i, j) : \varphi_i^* + \psi_j^* = c_{ij}\}.$$

Entonces

$$\text{sop}(\pi^*) \subseteq \Gamma^*.$$

Es importante observar que, en general, no tenemos igualdad. Puede ocurrir que

$$\varphi_i^* + \psi_j^* = c_{ij}$$

pero que

$$\pi_{ij}^* = 0.$$

La condición de complementariedad afirma solamente que todo lugar donde π^* transporta masa debe corresponder a una restricción dual activa.

Así, una solución óptima del problema dual permite identificar un conjunto de pares de puntos que contiene el soporte de un plan óptimo. Las restricciones marginales determinan luego cómo puede distribuirse la masa sobre dicho conjunto.

En particular,

$$\pi_{ij}^* > 0 \implies \varphi_i^* + \psi_j^* = c_{ij}.$$

En el caso general, la afirmación correspondiente será que un plan óptimo está concentrado, en el sentido de medida, sobre el conjunto donde la desigualdad dual se satura:

$$\varphi^*(x) + \psi^*(y) = c(x, y).$$

Esta relación entre los potenciales de Kantorovich y el soporte de los planes óptimos será fundamental para comprender la estructura del transporte óptimo en el caso general.

Ejercicios

EJERCICIO 5.1 (Un problema 3×3 con potenciales no únicos). Sean $x_i = y_i = i - 1$ para $i = 1, 2, 3$, $a = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$, $b = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ y $c_{ij} = |x_i - y_j|^2$.

- (a) Hallar un plan óptimo π y el costo óptimo. (Conviene “llenar” la matriz de arriba a la izquierda hacia abajo a la derecha; en el Capítulo 8 se verá por qué esto es óptimo.)
- (b) Escribir las condiciones de saturación $\varphi_i + \psi_j = c_{ij}$ en el soporte de π y las de admisibilidad fuera de él. Normalizando $\varphi_1 = 0$, probar que los pares óptimos forman el segmento

$$\varphi = (0, 1 - t, -t), \quad \psi = (0, 1, t), \quad t \in [2, 4].$$

- (c) Verificar que $\sum_i a_i \varphi_i + \sum_j b_j \psi_j$ no depende de t y coincide con el costo óptimo.
- (d) Explicar la no unicidad en términos del grafo bipartito $G_\pi = \{(i, j) : \pi_{ij} > 0\}$: ¿cuántas componentes conexas tiene?

EJERCICIO 5.2 (Unicidad de los potenciales y conexión del soporte). Sea π un plan óptimo del problema discreto y G_π su grafo bipartito de soporte.

- (a) Probar que todo par óptimo (φ, ψ) satura sobre G_π (Ejercicio 3.2).
- (b) Probar que si G_π es conexo, los pares óptimos son únicos salvo $(\varphi + s, \psi - s)$, $s \in \mathbb{R}$.
- (c) Probar que si G_π tiene k componentes conexas, el conjunto de pares óptimos tiene dimensión a lo sumo k , y dar un ejemplo en el que sea exactamente k (el Ejercicio 5.1 es el caso $k = 2$).

EJERCICIO 5.3 (Costo 0-1 y variación total). Sean $x_1, \dots, x_N$ puntos distintos, $\mu = \sum a_i \delta_{x_i}$, $\nu = \sum b_i \delta_{x_i}$ (mismo soporte, pesos distintos) y $c(x, y) = \mathbf{1}_{\{x \neq y\}}$.

- (a) Probar que el costo óptimo es $\sum_i (a_i - b_i)^+ = \frac{1}{2} \sum_i |a_i - b_i| = \|\mu - \nu\|_{TV}$, exhibiendo un plan que lo alcanza (dejar quieta la masa $\min\{a_i, b_i\}$ en cada punto).
- (b) Hallar un par óptimo (φ, ψ) del problema dual con $\varphi_i \in \{0, 1\}$ y $\psi_i \in \{-1, 0\}$, y verificar la dualidad fuerte.
- (c) Generalizar: para $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$ cualesquiera y $c = \mathbf{1}_{\{x \neq y\}}$, probar que

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int c d\pi = \|\mu - \nu\|_{TV}.$$

EJERCICIO 5.4 (La cara óptima). Sea $\Pi^0 \subset \Pi(a, b)$ el conjunto de planes óptimos del problema discreto.

- (a) Probar que Π^0 es un politopo convexo no vacío y que sus puntos extremales son puntos extremales de $\Pi(a, b)$ (una *cara* del politopo).
- (b) Sean $a = b = \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1)$, $x_i = i - 1$, $y_j = j$ ($i, j = 1, \dots, 4$) y $c_{ij} = |x_i - y_j|$. Probar que el costo óptimo es 1, exhibir al menos tres planes óptimos extremales distintos y describir Π^0 .
- (c) Probar que en (b) todo par óptimo (φ, ψ) satura sobre la unión de los soportes de todos los planes óptimos, y hallar todos los pares óptimos.

Capítulo 6

Potenciales de Kantorovich

El teorema de dualidad de Kantorovich, Teorema 4.1.3, permite expresar el costo óptimo de transporte como el valor de un problema de maximización sobre pares de funciones (φ, ψ) que satisfacen la restricción

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y), \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Sin embargo, el conjunto de funciones admisibles no posee, en principio, propiedades de compacidad que permitan obtener un resultado de existencia para el problema dual.

El objetivo de este capítulo es introducir una transformación natural, denominada *c-transformada*, que permitirá reformular el problema dual en términos de un único potencial y, bajo las hipótesis adecuadas, obtener la existencia de potenciales óptimos. Introduciremos así la noción de *potencial de Kantorovich*, extendiendo la noción vista en el caso discreto, que desempeña un papel fundamental en la teoría del transporte óptimo.

6.1. La *c*-transformada

DEFINICIÓN 6.1.1. Sea $\chi: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. La *c-transformada* de χ es la función $\chi^c: Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, definida por

$$\chi^c(y) = \inf_{x \in X} \{c(x, y) - \chi(x)\}.$$

Análogamente, si $\zeta: Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, definimos su *$\bar{c}$ -transformada* por

$$\zeta^{\bar{c}}(x) = \inf_{y \in Y} \{c(x, y) - \zeta(y)\}.$$

EJEMPLO 6.1.2. Consideremos el caso $X = Y = \mathbb{R}$, $c(x, y) = |x - y|^p$, $p > 1$, y tomemos la función lineal $\chi(x) = x$. Su *c-transformada* está dada por

$$\chi^c(y) = \inf_{x \in \mathbb{R}} \{|x - y|^p - x\}.$$

Haciendo el cambio de variable $z = x - y$, obtenemos

$$\chi^c(y) = -y + \inf_{z \in \mathbb{R}} \{|z|^p - z\}.$$

Como $p > 1$, la función $z \mapsto |z|^p - z$ es convexa y tiende a $+\infty$ cuando $|z| \rightarrow \infty$, por lo que alcanza su mínimo global. Igualando la derivada a cero, $p|z|^{p-2}z = 1$, se obtiene que el mínimo se alcanza en

$$z = p^{-1/(p-1)},$$

y por lo tanto

$$\chi^c(y) = -y - (p-1)p^{-p/(p-1)}.$$

En particular, la c -transformada de una función lineal es nuevamente una función lineal, aunque su término constante depende de la potencia p elegida para el costo.

La definición de la c -transformada tiene además una interpretación directa en términos del problema dual. Dada una función $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, queremos encontrar la mayor función $\psi: Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ que, junto con φ , satisfaga la condición de admisibilidad

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y), \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Pero esta desigualdad es equivalente a

$$\psi(y) \leq c(x, y) - \varphi(x), \quad x \in X.$$

Por lo tanto, para cada $y \in Y$, el mayor valor posible de $\psi(y)$ es

$$\inf_{x \in X} \{c(x, y) - \varphi(x)\} = \varphi^c(y).$$

Así, la c -transformada φ^c es precisamente la función óptima que podemos asociar a φ para satisfacer la restricción de admisibilidad del problema dual.

Una propiedad importante de la c -transformada es que la operación de tomar el ínfimo preserva, bajo condiciones naturales, la regularidad de las funciones involucradas. En particular, si el costo c posee un módulo de continuidad uniforme respecto de una de sus variables, entonces la c -transformada hereda ese mismo módulo de continuidad en dicha variable. Este hecho será útil más adelante para obtener regularidad de los potenciales de Kantorovich.

PROPOSICIÓN 6.1.3. *Supongamos que X e Y son espacios métricos y que $c: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ admite un módulo de continuidad uniforme en la variable y , es decir, existe una función monótona no decreciente $\omega: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, con $\omega(0) = \omega(0+) = 0$ tal que*

$$|c(x, y) - c(x, y')| \leq \omega(d_Y(y, y'))$$

para todo $x \in X$ y todo $y, y' \in Y$.

Entonces, para toda función $\chi: X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\chi^c(y) > -\infty$ para todo $y \in Y$ (lo cual ocurre, por ejemplo, si c está acotada inferiormente y χ está acotada superiormente), su c -transformada

$$\chi^c(y) = \inf_{x \in X} \{c(x, y) - \chi(x)\}$$

admite el mismo módulo de continuidad:

$$|\chi^c(y) - \chi^c(y')| \leq \omega(d_Y(y, y')).$$

En particular, si c es uniformemente continua en $X \times Y$, entonces χ^c es uniformemente continua en Y .

DEMOSTRACIÓN. Para cada $x \in X$, definimos

$$g_x(y) = c(x, y) - \chi(x).$$

Como el segundo término es constante respecto de y , tenemos

$$|g_x(y) - g_x(y')| = |c(x, y) - c(x, y')| \leq \omega(d_Y(y, y')).$$

Es decir, todas las funciones g_x poseen el mismo módulo de continuidad.

Por definición,

$$\chi^c(y) = \inf_{x \in X} g_x(y).$$

Sean ahora $y, y' \in Y$. Para todo $x \in X$,

$$g_x(y) \leq g_x(y') + \omega(d_Y(y, y')).$$

Tomando ínfimo respecto de x obtenemos

$$\chi^c(y) \leq \chi^c(y') + \omega(d_Y(y, y')).$$

Intercambiando los papeles de y e y' se obtiene

$$\chi^c(y') \leq \chi^c(y) + \omega(d_Y(y, y')).$$

Por lo tanto,

$$|\chi^c(y) - \chi^c(y')| \leq \omega(d_Y(y, y')),$$

como queríamos demostrar. $\square$

La aplicación de la c -transformada permite distinguir una clase de funciones que resulta especialmente relevante para el problema dual. En efecto, las funciones obtenidas como c -transformada de otra función son, por construcción, las que aparecen naturalmente al reemplazar uno de los potenciales de un par admisible por el potencial que lo mejora. Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 6.1.4. Una función $\chi: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ se dice c -cóncava si existe una función $\zeta: Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que

$$\chi = \zeta^c.$$

Análogamente, una función $\zeta: Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ se dice $\bar{c}$ -cóncava si existe una función $\chi: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ tal que

$$\zeta = \chi^c.$$

La importancia de la c -transformada se pone de manifiesto en el siguiente resultado. Dado cualquier par admisible para el problema dual, es posible reemplazar uno de los potenciales por la c -transformada del otro sin violar las restricciones y sin disminuir el valor del funcional. En particular, la búsqueda de potenciales óptimos puede restringirse, como veremos más adelante, a funciones que sean c -cóncavas.

PROPOSICIÓN 6.1.5. Sea (φ, ψ) un par admisible para el problema dual, es decir,

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y), \quad (x, y) \in X \times Y.$$

Entonces se verifican las siguientes propiedades.

1. El par (φ, φ^c) también es admisible y

$$\varphi^c \geq \psi.$$

En consecuencia,

$$\int_Y \varphi^c d\nu \geq \int_Y \psi d\nu.$$

2. El par $(\varphi^{c\bar{c}}, \varphi^c)$ también es admisible y

$$\varphi^{c\bar{c}} \geq \varphi.$$

En consecuencia,

$$\int_X \varphi^{c\bar{c}} d\mu \geq \int_X \varphi d\mu.$$

DEMOSTRACIÓN. Como (φ, ψ) es admisible,

$$\psi(y) \leq c(x, y) - \varphi(x),$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Tomando ínfimo respecto de x obtenemos

$$\psi(y) \leq \inf_{x \in X} \{c(x, y) - \varphi(x)\} = \varphi^c(y),$$

es decir,

$$\psi \leq \varphi^c.$$

Además,

$$\varphi(x) + \varphi^c(y) = \varphi(x) + \inf_{z \in X} \{c(z, y) - \varphi(z)\} \leq \varphi(x) + c(x, y) - \varphi(x) = c(x, y),$$

por lo que (φ, φ^c) sigue siendo admisible.

La desigualdad entre las integrales es inmediata, ya que $\varphi^c \geq \psi$.

Para demostrar la segunda afirmación, observamos que

$$\varphi^{c\bar{c}}(x) = \inf_{y \in Y} \{c(x, y) - \varphi^c(y)\}.$$

Como el par (φ, φ^c) es admisible,

$$\varphi(x) + \varphi^c(y) \leq c(x, y),$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$, de donde

$$\varphi(x) \leq c(x, y) - \varphi^c(y).$$

Tomando ínfimo respecto de y concluimos que

$$\varphi(x) \leq \varphi^{c\bar{c}}(x).$$

Finalmente,

$$\varphi^{c\bar{c}}(x) + \varphi^c(y) = \inf_{z \in Y} \{c(x, z) - \varphi^c(z)\} + \varphi^c(y) \leq c(x, y),$$

por lo que el par $(\varphi^{c\bar{c}}, \varphi^c)$ también es admisible.

La desigualdad entre las integrales se obtiene nuevamente a partir de la desigualdad puntual $\varphi^{c\bar{c}} \geq \varphi$. $\square$

La proposición anterior muestra que, dado un par admisible (φ, ψ) , podemos mejorar el valor del funcional dual reemplazándolo por el par

$$(\varphi^{c\bar{c}}, \varphi^c).$$

En efecto, la nueva pareja sigue siendo admisible y, además,

$$\varphi^{c\bar{c}} \geq \varphi,$$

por lo que el valor del funcional dual no disminuye.

Cabe preguntarse entonces qué ocurre si continuamos aplicando este procedimiento. A primera vista, podríamos reemplazar nuevamente $\varphi^{c\bar{c}}$ por su doble transformada $\varphi^{c\bar{c}c\bar{c}}$, obteniendo una nueva función que, en principio, podría ser todavía mayor. Sin embargo, este proceso se detiene: una vez que una función es c -cóncava, su doble transformación no la modifica.

La siguiente proposición precisa esta observación y caracteriza exactamente las funciones para las cuales la doble transformación no produce ninguna mejora.

PROPOSICIÓN 6.1.6. *Una función $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ es c -cóncava si y sólo si*

$$\varphi = \varphi^{c\bar{c}}.$$

DEMOSTRACIÓN. Observemos primero dos hechos generales. En primer lugar, para toda función $\zeta: Y \rightarrow \mathbb{R}$ el par $(\zeta^{\bar{c}}, \zeta)$ es admisible, pues $\zeta^{\bar{c}}(x) + \zeta(y) = \inf_{y'} \{c(x, y') - \zeta(y')\} + \zeta(y) \leq c(x, y)$; aplicando la Proposición 6.1.5 a este par (con los roles de X e Y intercambiados) se obtiene $\zeta \leq \zeta^{\bar{c}c}$. En segundo lugar, la $\bar{c}$ -transformada invierte las desigualdades: si $\zeta_1 \leq \zeta_2$, entonces $c(x, y) - \zeta_1(y) \geq c(x, y) - \zeta_2(y)$ para todo (x, y) y, tomando ínfimo en y , $\zeta_1^{\bar{c}} \geq \zeta_2^{\bar{c}}$.

Si φ es c -cóncava, existe una función $\psi: Y \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\varphi = \psi^{\bar{c}}.$$

Por el primer hecho,

$$\psi \leq \psi^{\bar{c}c}.$$

Aplicando la $\bar{c}$ -transformada y usando el segundo hecho, obtenemos

$$\psi^{\bar{c}} \geq \psi^{\bar{c}c\bar{c}}.$$

Por lo tanto,

$$\varphi \geq \varphi^{c\bar{c}}.$$

Por otra parte, por la proposición anterior, toda función φ satisface

$$\varphi \leq \varphi^{c\bar{c}}.$$

Luego

$$\varphi = \varphi^{c\bar{c}}.$$

Recíprocamente, si

$$\varphi = \varphi^{c\bar{c}},$$

entonces φ es de la forma $\psi^{\bar{c}}$ tomando

$$\psi = \varphi^c.$$

Por definición, φ es c -cóncava. □

6.2. Existencia de potenciales de Kantorovich

El resultado anterior muestra que, a la hora de maximizar el funcional dual, no se pierde generalidad restringiendo la búsqueda a pares de la forma (φ, φ^c) , donde φ es una función c -cóncava.

Esta observación permite obtener un resultado de existencia para el problema dual. En efecto, las c -transformadas heredan el módulo de continuidad del costo y, por lo tanto, forman una familia equicontinua. Tras una adecuada normalización, el teorema de Ascoli–Arzelà proporciona la compacidad necesaria para extraer una subsucesión convergente de una sucesión maximizante.

Esta propiedad será de utilidad en la demostración del teorema principal de la sección, donde necesitaremos pasar al límite en una sucesión de c -transformadas.

LEMA 6.2.1. *Supongamos que X e Y son espacios compactos y que $c: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Entonces la aplicación*

$$\begin{aligned} C(X) &\longrightarrow C(Y), \\ \varphi &\longmapsto \varphi^c \end{aligned}$$

es 1-Lipschitz respecto de la norma uniforme. Es decir,

$$\|\varphi^c - \tilde{\varphi}^c\|_\infty \leq \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\infty$$

para toda $\varphi, \tilde{\varphi} \in C(X)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\delta = \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\infty.$$

Entonces, para todo $x \in X$,

$$\varphi(x) \leq \tilde{\varphi}(x) + \delta,$$

y por lo tanto, para todo $y \in Y$,

$$c(x, y) - \varphi(x) \geq c(x, y) - \tilde{\varphi}(x) - \delta.$$

Tomando ínfimos respecto de $x \in X$, obtenemos

$$\varphi^c(y) \geq \tilde{\varphi}^c(y) - \delta.$$

Intercambiando φ y $\tilde{\varphi}$, se obtiene análogamente

$$\tilde{\varphi}^c(y) \geq \varphi^c(y) - \delta.$$

En consecuencia,

$$|\varphi^c(y) - \tilde{\varphi}^c(y)| \leq \delta$$

para todo $y \in Y$. Por lo tanto,

$$\|\varphi^c - \tilde{\varphi}^c\|_\infty \leq \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_\infty,$$

como queríamos demostrar. □

El siguiente teorema muestra que, bajo hipótesis de compacidad y continuidad del costo, el problema dual admite una solución que puede elegirse formada por potenciales c -cóncavos.

TEOREMA 6.2.2 (Existencia de potenciales óptimos). *Supongamos que X e Y son espacios métricos compactos y que*

$$c: X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}$$

es continua.

Entonces el problema dual admite solución. Más precisamente, existe un par

$$(\varphi, \psi) \in C(X) \times C(Y)$$

que maximiza el funcional dual y verifica

$$\psi = \varphi^c, \quad \varphi = \psi^{\bar{c}}.$$

En particular, φ es c -cóncava y ψ es $\bar{c}$ -cóncava. Consecuentemente,

$$\sup_{\substack{\varphi, \psi \in C \\ \varphi + \psi \leq c}} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu \right\} = \sup_{\substack{\varphi \in C(X) \\ \varphi \text{ } c\text{-cóncava}}} \left\{ \int_X \varphi d\mu + \int_Y \varphi^c d\nu \right\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$(\varphi_n, \psi_n) \in C_b(X) \times C_b(Y)$$

una sucesión maximizante para el problema dual.

Gracias a la Proposición 6.1.5, podemos reemplazar cada uno de estos pares por

$$(\varphi_n^{c\bar{c}}, \varphi_n^c),$$

sin disminuir el valor del funcional dual. Por simplicidad, seguiremos denotando esta nueva sucesión por

$$(\varphi_n, \psi_n).$$

En consecuencia, podemos suponer que

$$\psi_n = \varphi_n^c, \quad \varphi_n = \psi_n^{\bar{c}},$$

para todo n . En particular, todas las funciones φ_n y ψ_n poseen el mismo módulo de continuidad que el costo c .

Podemos además normalizar las funciones suponiendo

$$\min_X \varphi_n = 0.$$

En efecto, sumar una constante a φ_n y restarla a ψ_n no altera el valor del funcional dual ni las relaciones anteriores, pues para toda constante $a \in \mathbb{R}$ se tiene

$$(\varphi_n + a)^c = \varphi_n^c - a, \quad (\psi_n - a)^{\bar{c}} = \psi_n^{\bar{c}} + a.$$

Como todas las φ_n poseen el mismo módulo de continuidad ω , se sigue que

$$0 \leq \varphi_n(x) \leq \omega(\text{diam}(X)),$$

para todo $x \in X$.

Por otra parte,

$$\psi_n(y) = \inf_{x \in X} \{c(x, y) - \varphi_n(x)\}.$$

Como

$$0 \leq \varphi_n \leq \omega(\text{diam}(X)),$$

obtenemos

$$\min_{X \times Y} c - \omega(\text{diam}(X)) \leq \psi_n(y) \leq \max_{X \times Y} c,$$

para todo $y \in Y$.

En consecuencia, las sucesiones (φ_n) y (ψ_n) son uniformemente acotadas y equicontinuas. Por el teorema de Ascoli–Arzelà, extrayendo una subsucesión si es necesario, podemos suponer que

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi, \quad \psi_n \longrightarrow \psi,$$

uniformemente.

La convergencia uniforme implica

$$\int_X \varphi_n d\mu + \int_Y \psi_n d\nu \longrightarrow \int_X \varphi d\mu + \int_Y \psi d\nu.$$

Además, como

$$\varphi_n(x) + \psi_n(y) \leq c(x, y),$$

para todo n , pasando al límite obtenemos

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y),$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$.

Por lo tanto, el par (φ, ψ) es admisible y, como es el límite de una sucesión maximizante, resulta óptimo.

Hasta el momento hemos demostrado que (φ, ψ) es un par óptimo para el problema dual. Sólo resta verificar que

$$\psi = \varphi^c, \quad \varphi = \psi^{\bar{c}}.$$

Por el Lema 6.2.1, la c -transformada es continua respecto de la norma del supremo. Como

$$\varphi_n \longrightarrow \varphi$$

uniformemente, se sigue que

$$\varphi_n^c \longrightarrow \varphi^c$$

uniformemente. Pero

$$\psi_n = \varphi_n^c$$

para todo n y, por otro lado,

$$\psi_n \longrightarrow \psi$$

uniformemente. Por unicidad del límite,

$$\psi = \varphi^c.$$

De manera completamente análoga, aplicando el lema a la $\bar{c}$ -transformada, obtenemos

$$\varphi = \psi^{\bar{c}}.$$

En particular, φ es c -cóncava y ψ es $\bar{c}$ -cóncava. □

6.3. Soporte de los planes óptimos

Una vez establecida la existencia de potenciales de Kantorovich, podemos estudiar su relación con los planes óptimos. El resultado fundamental es que un plan óptimo sólo puede transportar masa a través de puntos donde se satura la restricción del problema dual.

Para formular este resultado, introducimos el siguiente conjunto.

DEFINICIÓN 6.3.1. Sean (φ, ψ) un par admisible para el problema dual. Definimos el *conjunto de saturación* asociado a (φ, ψ) como

$$\Gamma_{\varphi, \psi} = \{(x, y) \in X \times Y : \varphi(x) + \psi(y) = c(x, y)\}.$$

El siguiente resultado establece que, si un plan y un par de potenciales son óptimos para los problemas primal y dual, respectivamente, entonces el plan está concentrado en el conjunto de saturación.

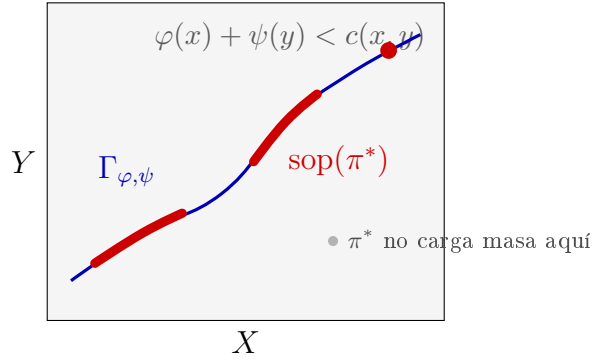


FIGURA 6.1. La geometría de la condición de saturación. El par dual admisible (φ, ψ) verifica $\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$ en todo $X \times Y$; el conjunto de saturación $\Gamma_{\varphi, \psi}$ (en azul) es donde vale la igualdad. Si π^* y (φ, ψ) son ambos óptimos, la Proposición 6.3.2 afirma que π^* está concentrado en $\Gamma_{\varphi, \psi}$: su soporte (en rojo) se apoya sobre la curva y no carga masa fuera de ella. Esta imagen reaparecerá con Γ igual al gráfico de un mapa T : en el Capítulo 8 un mapa monótono, y en el Capítulo 9 el gradiente de una función convexa.

PROPOSICIÓN 6.3.2. Sean π^* un plan óptimo para el problema de Kantorovich y (φ^*, ψ^*) un par óptimo para el problema dual. Entonces

$$\varphi^*(x) + \psi^*(y) = c(x, y) \quad \pi^* \text{-c.t.p.}$$

Es decir,

$$\pi^*(\Gamma_{\varphi^*, \psi^*}) = 1.$$

Si, además, X e Y son compactos y las funciones c , φ^* y ψ^* son continuas, entonces

$$\text{sop}(\pi^*) \subset \Gamma_{\varphi^*, \psi^*}.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la admisibilidad del par (φ^*, ψ^*) ,

$$\varphi^*(x) + \psi^*(y) \leq c(x, y)$$

para todo $(x, y) \in X \times Y$. Por lo tanto, la función

$$c(x, y) - \varphi^*(x) - \psi^*(y)$$

es no negativa.

Como π^* y (φ^*, ψ^*) son óptimos y, por el teorema de dualidad de Kantorovich,

$$\int_{X \times Y} c d\pi^* = \int_X \varphi^* d\mu + \int_Y \psi^* d\nu,$$

obtenemos

$$0 = \int_{X \times Y} c(x, y) d\pi^*(x, y) - \int_X \varphi^* d\mu - \int_Y \psi^* d\nu.$$

Como π^* tiene marginales μ y ν , podemos escribir

$$\int_X \varphi^* d\mu + \int_Y \psi^* d\nu = \int_{X \times Y} (\varphi^*(x) + \psi^*(y)) d\pi^*(x, y).$$

En consecuencia,

$$0 = \int_{X \times Y} (c(x, y) - \varphi^*(x) - \psi^*(y)) d\pi^*(x, y).$$

Como el integrando es no negativo, debe ser nulo π^* -c.t.p. Por lo tanto,

$$\varphi^*(x) + \psi^*(y) = c(x, y) \quad \pi^*\text{-c.t.p.}$$

y, equivalentemente,

$$\pi^*(\Gamma_{\varphi^*, \psi^*}) = 1.$$

Finalmente, supongamos que X e Y son compactos y que c , φ^* y ψ^* son continuas (recordemos que el teorema de existencia de potenciales provee, en el caso compacto, un par óptimo continuo). Entonces la función

$$(x, y) \longmapsto c(x, y) - \varphi^*(x) - \psi^*(y)$$

es continua y el conjunto de saturación $\Gamma_{\varphi^*, \psi^*}$ es cerrado.

Supongamos que existiera

$$(x_0, y_0) \in \text{sop}(\pi^*) \setminus \Gamma_{\varphi^*, \psi^*}.$$

Por ser $\Gamma_{\varphi^*, \psi^*}$ cerrado, existe un entorno abierto U de (x_0, y_0) que no interseca a $\Gamma_{\varphi^*, \psi^*}$. Como (x_0, y_0) pertenece al soporte de π^* , se tiene

$$\pi^*(U) > 0.$$

Pero en U ,

$$c(x, y) - \varphi^*(x) - \psi^*(y) > 0,$$

lo cual contradice que esta función sea nula π^* -c.t.p. Por lo tanto,

$$\text{sop}(\pi^*) \subset \Gamma_{\varphi^*, \psi^*}.$$

□

PROPOSICIÓN 6.3.3 (Criterio de optimalidad). *Sea π un plan admisible para el problema de Kantorovich y sea (φ, ψ) un par admisible para el problema dual. Si*

$$\varphi(x) + \psi(y) = c(x, y) \quad \pi\text{-c.t.p.},$$

entonces π es un plan óptimo y (φ, ψ) es un par óptimo para el problema dual.

DEMOSTRACIÓN. Por la condición de saturación y el hecho de que π tiene marginales μ y ν , tenemos

$$\begin{aligned} \int_{X \times Y} c \, d\pi &= \int_{X \times Y} (\varphi(x) + \psi(y)) \, d\pi(x, y) \\ &= \int_X \varphi \, d\mu + \int_Y \psi \, d\nu. \end{aligned}$$

Pero, por dualidad débil, para todo plan admisible $\tilde{\pi}$ y todo par dual admisible $(\tilde{\varphi}, \tilde{\psi})$ se tiene

$$\int_X \tilde{\varphi} \, d\mu + \int_Y \tilde{\psi} \, d\nu \leq \int_{X \times Y} c \, d\tilde{\pi}.$$

Por lo tanto, la igualdad anterior implica que ambos valores coinciden con el valor óptimo. En consecuencia, π es óptimo y (φ, ψ) es un par óptimo para el problema dual. $\square$

En particular, si (φ^*, ψ^*) es un par de potenciales óptimos, entonces cualquier plan admisible π que esté concentrado en el conjunto de saturación

$$\Gamma_{\varphi^*, \psi^*} = \{(x, y) \in X \times Y : \varphi^*(x) + \psi^*(y) = c(x, y)\}$$

es necesariamente un plan óptimo. Es decir, una vez conocidos los potenciales óptimos, la búsqueda de un plan óptimo puede reducirse a buscar un plan con marginales μ y ν concentrado en $\Gamma_{\varphi^*, \psi^*}$.

6.4. El costo cuadrático y la transformada de Legendre

Veamos cómo la condición de saturación de los potenciales de Kantorovich adquiere una forma particularmente interesante para el costo cuadrático

$$c(x, y) = |x - y|^2.$$

Supongamos que $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ y que π^* es un plan óptimo. Sean φ, ψ potenciales de Kantorovich con $\psi = \varphi^c$ y $\varphi = \psi^c$. Recordemos que la existencia de tales potenciales la hemos demostrado únicamente cuando los soportes de las medidas son compactos; en esta sección la damos por supuesta, y volveremos sobre este punto en el Capítulo 9. Tenemos entonces que

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq |x - y|^2$$

para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, y

$$\varphi(x) + \psi(y) = |x - y|^2 \quad \pi^*\text{-c.t.p.}$$

Definamos

$$u(x) := \frac{|x|^2 - \varphi(x)}{2}, \quad v(y) := \frac{|y|^2 - \psi(y)}{2}.$$

Como

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y,$$

la desigualdad dual se puede escribir como

$$x \cdot y \leq u(x) + v(y).$$

Por otra parte, la igualdad de saturación se puede escribir como

$$x \cdot y = u(x) + v(y) \quad \pi^*\text{-c.t.p.}$$

Definamos

$$\bar{u}(y) := \sup_{z \in \mathbb{R}^d} \{z \cdot y - u(z)\}.$$

Entonces, la desigualdad

$$x \cdot y \leq u(x) + v(y)$$

implica

$$x \cdot y - u(x) \leq v(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$. Tomando supremo respecto de x , obtenemos

$$\bar{u}(y) \leq v(y).$$

Esta expresión motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 6.4.1. Sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La *transformada de Legendre* de u es la función $\bar{u}: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ definida por

$$\bar{u}(y) = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \{x \cdot y - u(x)\}.$$

Recordemos algunas propiedades básicas de esta transformación.

PROPOSICIÓN 6.4.2. Sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Entonces $\bar{u}$ es convexa. Además, si u es convexa y semicontinua inferiormente, entonces

$$\bar{\bar{u}} = u.$$

DEMOSTRACIÓN. La primera afirmación se obtiene inmediatamente de la definición, pues $\bar{u}$ es el supremo de funciones afines.

Para la segunda afirmación, demostramos aquí el caso particular en que $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$, que será suficiente para nuestros propósitos. Por definición de la transformada de Legendre,

$$x \cdot y - u(x) \leq \bar{u}(y)$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^d$. Por lo tanto,

$$x \cdot y - \bar{u}(y) \leq u(x),$$

y tomando supremo respecto de y obtenemos

$$\bar{\bar{u}}(x) \leq u(x).$$

Supongamos ahora que u es convexa y C^1 . La convexidad implica que la función u está por encima de todos sus hiperplanos tangentes: para todo $x, z \in \mathbb{R}^d$,

$$u(z) \geq u(x) + \nabla u(x) \cdot (z - x).$$

En efecto, esto se deduce directamente de la desigualdad de convexidad $u(\lambda z + (1 - \lambda)x) \leq \lambda u(z) + (1 - \lambda)u(x)$ dividiendo por $\lambda > 0$ y haciendo $\lambda \rightarrow 0$. En consecuencia,

$$z \cdot \nabla u(x) - u(z) \leq x \cdot \nabla u(x) - u(x).$$

La igualdad se alcanza para $z = x$, por lo que

$$\bar{u}(\nabla u(x)) = x \cdot \nabla u(x) - u(x).$$

Luego,

$$\begin{aligned}\bar{\bar{u}}(x) &\geq x \cdot \nabla u(x) - \bar{u}(\nabla u(x)) \\ &= u(x).\end{aligned}$$

Junto con la desigualdad anterior, concluimos que

$$\bar{\bar{u}}(x) = u(x).$$

Como x es arbitrario, $\bar{\bar{u}} = u$.

El resultado general es el conocido teorema de Fenchel–Moreau; puede consultarse, por ejemplo, en [18]. $\square$

Volvamos ahora a las funciones u y v asociadas a los potenciales de Kantorovich. Como $\psi = \varphi^c$, tenemos

$$\begin{aligned}\bar{u}(y) &= \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ x \cdot y - \frac{|x|^2 - \varphi(x)}{2} \right\} \\ &= \frac{|y|^2}{2} - \inf_{x \in \mathbb{R}^d} \left\{ \frac{|x - y|^2 - \varphi(x)}{2} \right\} \\ &= \frac{|y|^2 - \psi(y)}{2} \\ &= v(y).\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$v = \bar{u}.$$

De manera completamente análoga, como $\varphi = \psi^c$, obtenemos

$$u = v^*.$$

En particular,

$$u = v^*, \quad v = \bar{u}.$$

Como toda transformada de Legendre es convexa, concluimos que u y v son funciones convexas. Así, los potenciales de Kantorovich para el costo cuadrático pueden expresarse, mediante una modificación cuadrática, en términos de funciones convexas.

Además, la igualdad de saturación

$$x \cdot y = u(x) + v(y)$$

y la identidad $v = \bar{u}$ implican

$$u(x) + \bar{u}(y) = x \cdot y \quad \pi^*\text{-c.t.p.}$$

Supongamos ahora, además, que u es de clase C^1 . La igualdad anterior tiene una consecuencia muy importante. Por definición de la transformada de Legendre,

$$z \cdot y - u(z) \leq \bar{u}(y)$$

para todo $z \in \mathbb{R}^d$. Si

$$u(x) + \bar{u}(y) = x \cdot y,$$

entonces

$$z \cdot y - u(z) \leq x \cdot y - u(x),$$

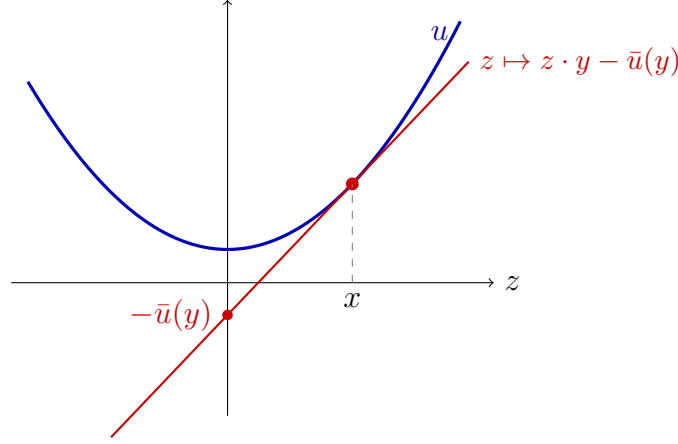


FIGURA 6.2. Interpretación geométrica de la transformada de Legendre en dimensión uno. Para una pendiente y fija, $\bar{u}(y) = \sup_z \{z \cdot y - u(z)\}$ es el menor desplazamiento vertical que hay que dar a la recta $z \mapsto z \cdot y$ para que quede por encima del gráfico de u : la recta $z \mapsto z \cdot y - \bar{u}(y)$ (en rojo) es la *recta soporte* de pendiente y . La igualdad $u(x) + \bar{u}(y) = x \cdot y$ dice exactamente que esa recta toca al gráfico de u en el punto x . Cuando u es diferenciable en x hay una única recta soporte que pasa por $(x, u(x))$, la tangente, y por lo tanto $y = u'(x)$; ésta es la observación que conduce a $T = \nabla u$.

y, por lo tanto,

$$u(z) \geq u(x) + y \cdot (z - x) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}^d.$$

Como u es diferenciable en x , podemos comparar esta desigualdad con la expansión de primer orden

$$u(x + h) = u(x) + \nabla u(x) \cdot h + o(|h|).$$

Tomando $z = x + h$ obtenemos

$$(\nabla u(x) - y) \cdot h + o(|h|) \geq 0 \quad \text{para todo } h.$$

Aplicando esta desigualdad a h y a $-h$, y haciendo $h \rightarrow 0$, concluimos que

$$(\nabla u(x) - y) \cdot h = 0 \quad \text{para todo } h \in \mathbb{R}^d.$$

Así, hemos demostrado que

$$y = \nabla u(x) \quad \pi^*\text{-c.t.p.}$$

Supongamos ahora, además, que el plan óptimo está concentrado en el gráfico de un mapa $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, es decir,

$$\pi^* = (\text{id}, T)_\# \mu.$$

Esto equivale a decir que π^* asigna masa uno al conjunto $\{(x, T(x)) : x \in \mathbb{R}^d\}$, de modo que

$$y = T(x) \quad \pi^*\text{-c.t.p.}$$

Combinando con la igualdad anterior, obtenemos $T(x) = \nabla u(x)$ para $\pi^*\text{-c.t.p.}$ par (x, y) .

Para concluir que esta igualdad vale μ -c.t.p., usamos que la primera marginal de π^* es μ . En efecto, como $\pi^* = (\text{id}, T)_\# \mu$, para todo conjunto medible $B \subset \mathbb{R}^d$ se tiene

$$\pi^*(B \times \mathbb{R}^d) = \mu(B).$$

En particular, tomando $B = \{x : T(x) \neq \nabla u(x)\}$,

$$\mu(\{x : T(x) \neq \nabla u(x)\}) = \pi^*(\{(x, y) : T(x) \neq \nabla u(x)\}) = 0,$$

donde la última igualdad se sigue de que $T(x) = \nabla u(x)$ para π^* -c.t.p. (x, y) . Por lo tanto,

$$T(x) = \nabla u(x) \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

Observemos que este argumento es condicional: asumimos que el plan óptimo tiene la forma de un mapa de transporte determinista. La existencia de tal mapa, y su unicidad, no están garantizadas en general por lo desarrollado hasta aquí.

Este fenómeno no es accidental. El teorema de Brenier [6] mostrará que, bajo hipótesis adecuadas sobre las medidas (en particular, si μ es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue), existe un único mapa de transporte óptimo y que dicho mapa es necesariamente de la forma

$$T = \nabla u,$$

para alguna función convexa u . El argumento que acabamos de presentar constituye una primera aproximación a esta estructura: muestra que *si* existe tal mapa, entonces debe ser el gradiente de una función convexa.

Ejercicios

EJERCICIO 6.1 (Propiedades de la c -transformada). Sea $c: X \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ acotada y sea $\chi: X \rightarrow \mathbb{R}$ acotada.

- Probar que $\chi^{c\bar{c}} \geq \chi$ y que $\chi^{c\bar{c}c} = \chi^c$. Deducir que la operación $\chi \mapsto \chi^{c\bar{c}}$ es idempotente.
- Decimos que $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ es c -cóncava si $\varphi = \zeta^{\bar{c}}$ para alguna $\zeta: Y \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Probar que φ es c -cóncava si y sólo si $\varphi = \varphi^{c\bar{c}}$.
- Probar que $(\chi + s)^c = \chi^c - s$ para $s \in \mathbb{R}$, y que $\chi \leq \tilde{\chi}$ implica $\chi^c \geq \tilde{\chi}^c$.
- Probar que el ínfimo puntual de una familia de funciones c -cóncavas es c -cóncava (o idénticamente $-\infty$).

EJERCICIO 6.2 (Equicontinuidad del ínfimo). Sea (X, d) un espacio métrico, A un conjunto y $\mathcal{F}$ una familia de funciones $f: X \times A \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\{f(\cdot, \alpha) : f \in \mathcal{F}, \alpha \in A\}$ es equicontinua (con un módulo de continuidad ω común). Probar que la familia $\{x \mapsto \inf_{\alpha \in A} f(x, \alpha) : f \in \mathcal{F}\}$ es equicontinua con el mismo módulo ω , siempre que los ínfimos sean finitos. Explicar en qué punto de la demostración del Teorema 6.2.2 se usa este hecho (Lema 6.2.1).

EJERCICIO 6.3 (Costos que son distancias). Sea $X = Y$ y $c = d$ una distancia en X (acotada, para simplificar).

- Probar que $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}$ es c -cóncava si y sólo si es 1-Lipschitz respecto de d , y que en ese caso $\varphi^c = -\varphi$.

(b) Deducir que, para este costo, el problema dual se escribe

$$\sup \left\{ \int \varphi d(\mu - \nu) : \varphi \text{ 1-Lipschitz} \right\}.$$

(Éste es el contenido del Lema 10.6.1 y del Teorema 10.6.2 para $d(x, y) = |x - y|$.)

(c) Aplicarlo a $c(x, y) = |x - y|^\alpha$ en $\mathbb{R}^d$ con $0 < \alpha < 1$: probar que es una distancia y que

$$\min_{\Pi(\mu, \nu)} \int |x - y|^\alpha d\pi = \sup \left\{ \int u d(\mu - \nu) : [u]_{0, \alpha} \leq 1 \right\}, \quad [u]_{0, \alpha} = \sup_{x \neq y} \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\alpha},$$

para μ, ν con soporte compacto.

EJERCICIO 6.4 (c -transformadas para el costo cuadrático). Sea $c(x, y) = |x - y|^2$ en $\mathbb{R}^d$.

- (a) Para $\chi(x) = \lambda|x|^2$, calcular χ^c y mostrar que es finita si y sólo si $\lambda < 1$; en ese caso $\chi^c(y) = -\frac{\lambda}{1-\lambda}|y|^2$.
- (b) Para $\chi(x) = a \cdot x + b$, calcular χ^c y $\chi^{c\bar{c}}$.
- (c) Probar que φ es c -cóncava si y sólo si $u(x) = |x|^2 - \varphi(x)$ es convexa y semicontinua inferiormente, y expresar φ^c en términos de la transformada de Legendre $\bar{u}$ (Sección 6.4).

EJERCICIO 6.5 (La mejora de potenciales converge en el caso discreto). En el problema discreto (Capítulo 5), la Proposición 6.1.5 dice que $(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi^{c\bar{c}}, \varphi^c)$ no empeora el funcional dual.

- (a) Probar que, partiendo de cualquier $\varphi \in \mathbb{R}^N$, la iteración $\varphi \mapsto \varphi^{c\bar{c}}$ se detiene en un paso: $\varphi^{c\bar{c}}$ ya es c -cóncava (Ejercicio 6.1).
- (b) Mostrar con el ejemplo del Ejercicio 3.3 que un par $(\varphi^{c\bar{c}}, \varphi^c)$ no tiene por qué ser óptimo: la mejora de potenciales produce pares admisibles “ajustados” pero no resuelve el problema dual. (En el Capítulo 13 se verá que la versión *suavizada* de esta iteración sí converge al óptimo del problema regularizado.)

Ejercicios computacionales. Los ejercicios siguientes se resuelven con el cuaderno *Dualidad*, que acompaña los Capítulos 3 a 6 (véase el Apéndice E); los enunciados figuran también al final del cuaderno. Las referencias a secciones son a las del cuaderno.

EJERCICIO 6.6 (El 2×2 y su degeneración). En el ejemplo 2×2 de la Sección 8 del cuaderno, reemplazar $c_{12} = 3$ por un parámetro s y calcular el plan óptimo para $s \in [0, 4]$. Hallar el valor de s en el que cambia el vértice óptimo y verificar que allí todo el segmento $\Pi(a, b)$ es óptimo y los potenciales pierden unicidad (más allá de la constante aditiva).

EJERCICIO 6.7 (Potenciales únicos y grafo conexo). En el ejemplo 3×3 del Ejercicio 5.1 (Sección 9 del cuaderno), modificar las masas a manteniendo b hasta que el grafo de soporte G_π del plan óptimo sea conexo, y verificar que entonces ψ_3 queda determinado ($t_{\min} = t_{\max}$). Formular la conjetura general y compararla con el Ejercicio 5.2.

EJERCICIO 6.8 (Holgura complementaria y saturación espuria). En el ejemplo aleatorio de la Sección 1 del cuaderno, contar los pares (i, j) con $\pi_{ij} > 0$ y los pares con holgura $c_{ij} - \varphi_i - \psi_j < 10^{-9}$; el segundo conjunto contiene al primero (Ejercicio 3.2). Repetir para 50 instancias aleatorias y estimar con qué frecuencia hay saturación sin masa. ¿Qué ocurre si los puntos x_i, y_j se toman en una grilla regular en lugar de al azar?

EJERCICIO 6.9 (Mejora de potenciales). Para 100 vectores φ aleatorios, calcular la fracción de la brecha dual $\mathcal{D}^* - \mathcal{D}(\varphi, \varphi^c)$ que cierra un paso de mejora $\varphi \mapsto \varphi^{c\bar{c}}$ (Proposición 6.1.5) y graficar su histograma. ¿Hay algún φ inicial para el cual un solo paso alcance el óptimo? (*Sugerencia:* partir de un potencial óptimo perturbado.) Comparar con el Ejercicio 6.5.

EJERCICIO 6.10 (Costo 0–1). Verificar la fórmula $\min_{\Pi(a,b)} \langle C, \pi \rangle = \frac{1}{2} \|a - b\|_1$ del Ejercicio 5.3 para 200 pares (a, b) aleatorios sobre los mismos puntos. Tomar después soportes *distintos* para μ y ν (ningún x_i coincide con un y_j) y observar que el costo óptimo es siempre 1: explicar por qué y qué relación tiene con la variación total de $\mu - \nu$.

Capítulo 7

Algunas interpretaciones y extensiones

El problema de transporte óptimo admite interpretaciones que van más allá de la formulación original como un problema de transporte de masa. La estructura matemática desarrollada en los capítulos anteriores permite describir situaciones en las que las medidas representan distribuciones de variables aleatorias, poblaciones de agentes o diferentes estados de un sistema.

En este capítulo exploraremos algunas de estas interpretaciones y extensiones. Comenzaremos revisitando la interpretación probabilística del problema, que permite entender el transporte óptimo para el costo cuadrático como la búsqueda del acoplamiento que maximiza la covarianza entre dos variables aleatorias. Veremos luego cómo la factorización polar de matrices proporciona una primera motivación geométrica para los resultados de Brenier que estudiaremos más adelante. A continuación presentaremos dos interpretaciones económicas de los potenciales de Kantorovich: como excedentes en problemas de *matching* y como precios de equilibrio. Continuaremos extendiendo la formulación del problema al caso de más de dos marginales. Finalizaremos con una discusión sobre el rol de la teoría continua frente a la discretización: ¿por qué no basta con reducir todo al caso finito y aplicar directamente programación lineal?

El objetivo del capítulo no es desarrollar en profundidad estas teorías, sino mostrar la amplitud del marco del transporte óptimo y algunas de las situaciones en las que las ideas estudiadas hasta ahora aparecen de manera natural.

7.1. Interpretación probabilística revisitada

En la Sección 1.4 presentamos una interpretación probabilística del problema de Kantorovich. Recordemos que, dadas dos medidas de probabilidad μ y ν , podemos interpretarlas como las leyes marginales de dos variables aleatorias $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$. El problema de Kantorovich consiste entonces en elegir, entre todas las posibles leyes conjuntas de $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ con marginales fijadas, aquella que minimiza el costo esperado.

Esta interpretación adquiere un significado particularmente interesante para el costo cuadrático $c(x, y) = |x - y|^2$. Sean $\mathbf{X} \sim \mu$ e $\mathbf{Y} \sim \nu$, y denotemos por

$$x_0 = \mathbb{E}[\mathbf{X}] = \int x d\mu(x), \quad y_0 = \mathbb{E}[\mathbf{Y}] = \int y d\nu(y)$$

sus valores medios. Escribiendo $\mathbf{X} - \mathbf{Y} = (\mathbf{X} - x_0) - (\mathbf{Y} - y_0) + (x_0 - y_0)$ y desarrollando el cuadrado obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\mathbf{X} - \mathbf{Y}|^2] &= \mathbb{E}[|\mathbf{X} - x_0|^2] + \mathbb{E}[|\mathbf{Y} - y_0|^2] + |x_0 - y_0|^2 \\ &\quad - 2 \mathbb{E}[(\mathbf{X} - x_0) \cdot (\mathbf{Y} - y_0)]. \end{aligned}$$

Los tres primeros términos dependen únicamente de las leyes marginales μ y ν : los dos primeros son sus varianzas y el tercero mide la distancia entre sus medias. Al variar el acoplamiento entre $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ el único término que cambia es la covarianza $\mathbb{E}[(\mathbf{X} - x_0) \cdot (\mathbf{Y} - y_0)]$. Por lo tanto,

$$\min_{\mathbf{X} \sim \mu, \mathbf{Y} \sim \nu} \mathbb{E}[|\mathbf{X} - \mathbf{Y}|^2] \iff \max_{\mathbf{X} \sim \mu, \mathbf{Y} \sim \nu} \mathbb{E}[(\mathbf{X} - x_0) \cdot (\mathbf{Y} - y_0)].$$

El transporte óptimo para el costo cuadrático puede interpretarse entonces como el problema de encontrar, entre todas las posibles estructuras de dependencia con marginales fijadas, aquella que maximiza la covarianza entre las dos variables.

En dimensión uno esta idea conduce al acoplamiento monótono que será estudiado en el Capítulo 8: el acoplamiento que maximiza la covarianza es precisamente el que empareja los valores de $\mathbf{X}$ e $\mathbf{Y}$ preservando su orden. En dimensiones superiores la noción de monotonicidad adquiere una forma más rica y se relaciona con la estructura de los mapas óptimos como gradientes de funciones convexas, que estudiaremos en el Capítulo 9.

7.2. Una primera mirada a la factorización polar

Antes de estudiar la estructura de los mapas óptimos en el caso general, es útil considerar el caso particular de aplicaciones lineales. En este contexto aparece una descomposición clásica que proporciona una motivación geométrica para los resultados de Brenier que veremos en el Capítulo 9.

Por el Teorema C.1.2, toda matriz invertible $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ admite una factorización polar $A = SU$, donde S es simétrica definida positiva y U es ortogonal. Una aplicación lineal $x \mapsto Ax$ puede escribirse entonces como $Ax = S(Ux)$: primero se aplica la rotación o reflexión U , que preserva la medida de Lebesgue, y luego la transformación simétrica S .

La parte simétrica S tiene una estructura especialmente sencilla desde el punto de vista del cálculo diferencial: si definimos $u(x) = \frac{1}{2}Sx \cdot x$, entonces u es convexa y $\nabla u(x) = Sx$, de modo que $Ax = \nabla u(Ux)$. Así, la factorización polar separa la aplicación A en una parte que reorganiza los puntos sin modificar la medida y otra que posee la estructura de un gradiente de función convexa.

Esta descomposición tiene además una caracterización variacional que conecta directamente con el transporte óptimo. Recordemos el producto escalar de matrices $A : R = \text{Tr}(AR^T)$. Tenemos el siguiente resultado.

PROPOSICIÓN 7.2.1. *Sea $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ invertible con factorización polar $A = SU$. Entonces*

$$A : U = \max_{\substack{R \in \mathbb{R}^{d \times d} \\ RR^T = I}} A : R.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea R una matriz ortogonal. Como $A = SU$,

$$A : R = \text{Tr}(AR^T) = \text{Tr}(SUR^T).$$

Denotemos $Q = UR^T$, que es ortogonal por ser producto de matrices ortogonales. Entonces $A : R = \text{Tr}(SQ)$. Como S es simétrica definida positiva, admite una descomposición espectral $S = P\Lambda P^T$ con P ortogonal y $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\lambda_i > 0$.

Entonces

$$\text{Tr}(SQ) = \text{Tr}(P\Lambda P^T Q) = \text{Tr}(\Lambda P^T Q P).$$

Sea $\tilde{Q} = P^T Q P$, que también es ortogonal. Entonces

$$\text{Tr}(\Lambda \tilde{Q}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \tilde{Q}_{ii}.$$

Como $\tilde{Q}$ es ortogonal, $|\tilde{Q}_{ii}| \leq 1$ para todo i , y por lo tanto

$$\text{Tr}(\Lambda \tilde{Q}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i \tilde{Q}_{ii} \leq \sum_{i=1}^d \lambda_i = \text{Tr}(S).$$

La cota se alcanza cuando $\tilde{Q} = I$, es decir, cuando $Q = I$, es decir, cuando $R = U$. Por lo tanto $A : U = \text{Tr}(S) \geq A : R$ para toda R ortogonal. $\square$

La relación con el costo cuadrático queda de manifiesto observando que, para toda matriz ortogonal R ,

$$\|A - R\|^2 = \|A\|^2 - 2A : R + \|R\|^2 = \|A\|^2 - 2A : R + d,$$

ya que $\|R\|^2 = \text{Tr}(RR^T) = d$. Maximizar $A : R$ es entonces equivalente a minimizar $\|A - R\|^2$: la parte ortogonal U es la transformación que preserva la estructura euclídea y queda más cerca de A para el costo cuadrático.

La factorización polar lineal constituye así una primera manifestación de una idea que reaparecerá en el teorema de Brenier: separar un mapa en una parte que preserva la distribución y otra que tiene la estructura de un gradiente de función convexa. En el caso general, esta intuición conduce a la llamada *factorización polar de Brenier*, que estudiaremos en el Capítulo 9 una vez que hayamos desarrollado las herramientas necesarias.

7.3. Interpretación económica: problemas de matching

El problema de transporte óptimo admite una interpretación natural en términos de *matching* entre dos poblaciones. En este contexto, un plan $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ no representa el movimiento de masa sino una regla de asociación: la cantidad $\pi(A \times B)$ indica la fracción de agentes de tipo $x \in A$ emparejados con agentes de tipo $y \in B$. Si $U(x, y)$ denota la utilidad total generada por la asociación de los tipos x e y , el matching socialmente óptimo resuelve

$$\max_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int U(x, y) d\pi(x, y),$$

que es precisamente un problema de transporte óptimo con costo $c = -U$.

Una noción central en este contexto es la de *matching estable*: un matching π es estable si ningún par de agentes prefiere separarse de sus parejas actuales para asociarse entre sí. Esta condición admite una formulación en términos de los potenciales de Kantorovich: π es estable si existen funciones φ y ψ tales que

$$U(x, y) \leq \varphi(x) + \psi(y) \quad \text{para todo } (x, y),$$

con igualdad π -c.t.p. La desigualdad expresa que, para cualquier par (x, y) no asociado en π , la utilidad que generaría su unión no supera $\varphi(x) + \psi(y)$; si así no fuera, ambos

agentes preferirían abandonar a sus parejas actuales para asociarse entre sí, contradiciendo la estabilidad. La igualdad π -c.t.p. garantiza que las parejas efectivamente formadas agotan exactamente ese valor, de modo que $\varphi(x)$ y $\psi(y)$ pueden interpretarse como la parte del excedente total que captura cada agente. Estas son precisamente las condiciones de optimalidad del problema de transporte y su dual con costo $c = -U$, lo que establece la equivalencia entre matching estable y transporte óptimo. Los mismos potenciales admiten además una interpretación como precios de mercado. Supongamos que x representa un tipo de bien e y un tipo de consumidor, y que $U(x, y)$ es la utilidad bruta que obtiene el consumidor y al adquirir el bien x . Si $\varphi(x)$ es el precio del bien, un consumidor de tipo y elige

$$x^*(y) \in \operatorname{argmax}_{x \in X} \{U(x, y) - \varphi(x)\}.$$

Un equilibrio de mercado exige que estas decisiones sean compatibles con las cantidades disponibles: la distribución de bienes adquiridos debe coincidir con la oferta μ y la de consumidores con ν . Esta compatibilidad se traduce exactamente en que el plan inducido por las decisiones individuales satisfaga las condiciones de optimalidad del transporte óptimo, y los potenciales φ y ψ actúan como los precios que coordinan a los agentes y hacen posible el equilibrio.

En ambas interpretaciones, la estructura matemática del transporte óptimo —una desigualdad global y una igualdad sobre el soporte del plan óptimo— adquiere un significado económico preciso y natural.

7.4. Transporte multimarginal

Una generalización natural del problema de Kantorovich consiste en considerar simultáneamente más de dos marginales. Sean $X_1, \dots, X_N$ espacios medibles y, para cada $i = 1, \dots, N$, sea $\mu_i \in \mathcal{P}(X_i)$. Un *plan de transporte multimarginal* es una medida de probabilidad π sobre $X_1 \times \dots \times X_N$ cuyas marginales están prescritas:

$$(\mathbf{p}_i)_\# \pi = \mu_i, \quad i = 1, \dots, N,$$

donde $\mathbf{p}_i: X_1 \times \dots \times X_N \rightarrow X_i$ es la proyección canónica. Denotamos por $\Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)$ al conjunto de todos estos planes. Dado un costo $c: X_1 \times \dots \times X_N \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, el problema de transporte multimarginal es

$$\inf_{\pi \in \Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)} \int c(x_1, \dots, x_N) d\pi(x_1, \dots, x_N).$$

La estructura del problema dual es análoga a la del caso de dos marginales: en lugar de dos potenciales aparece un potencial φ_i por cada marginal, y el problema dual toma la forma

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^N \int \varphi_i d\mu_i : \sum_{i=1}^N \varphi_i(x_i) \leq c(x_1, \dots, x_N) \right\}.$$

La desigualdad de admisibilidad que en el caso de dos marginales era $\varphi(x) + \psi(y) \leq c(x, y)$ se reemplaza simplemente por la suma de N potenciales.

Un ejemplo particularmente natural es el costo

$$c(x_1, \dots, x_N) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} |x_i - x_j|^2,$$

que mide la suma de las distancias cuadráticas entre todos los pares de puntos. El problema multimarginal busca entonces una distribución conjunta de N variables con marginales prescritas que minimice esta interacción total. Este ejemplo está estrechamente relacionado con los *baricentros de Wasserstein* [19], que estudiaremos más adelante: en ese contexto el problema multimarginal describe la distribución conjunta óptima de N variables que realizan simultáneamente el transporte hacia un punto de equilibrio común.

La extensión de dos a N marginales conserva así la estructura fundamental del problema de Kantorovich: se busca una medida conjunta con marginales prescritas, el problema tiene una formulación dual en términos de potenciales, y las condiciones de optimalidad relacionan el soporte del plan óptimo con la saturación de la desigualdad dual. La principal diferencia es que ahora contamos con un potencial por cada marginal.

7.5. Transporte óptimo y discretización

Una pregunta natural, especialmente para quienes trabajan con datos, es la siguiente: en la práctica las medidas μ y ν se conocen a través de muestras finitas, y el problema discreto puede resolverse directamente mediante programación lineal, como vimos en los Capítulos 3 y 5. ¿Para qué sirve entonces la teoría continua?

La respuesta es que la discretización y la programación lineal resuelven el problema numérico puntual, pero no responden a las preguntas más profundas que surgen en las aplicaciones.

Sin la teoría continua no sabemos qué estamos aproximando. Cuando se discretizan μ y ν en medidas empíricas

$$\mu_n = \sum_{i=1}^n a_i \delta_{x_i}, \quad \nu_m = \sum_{j=1}^m b_j \delta_{y_j},$$

con $a_i, b_j > 0$ y $\sum a_i = \sum b_j = 1$, el plan óptimo discreto $\pi_{n,m}$ existe y puede calcularse por programación lineal. Pero $\pi_{n,m}$ depende de la muestra particular $(x_1, \dots, x_n)$ y $(y_1, \dots, y_m)$ que se haya tomado — es una variable aleatoria, no un objeto determinista asociado a μ y ν . Para entender qué propiedad de μ y ν está estimando $\pi_{n,m}$, y en qué sentido $\pi_{n,m}$ converge cuando $n, m \rightarrow \infty$, es necesario saber que existe un plan óptimo continuo π^* entre μ y ν , que π^* es único bajo hipótesis adecuadas, y que la convergencia ocurre en una topología razonable. Sin ese marco, la discretización es un procedimiento ad hoc sin garantías de consistencia.

La estructura del objeto continuo guía la aproximación discreta. Aun cuando el tamaño de la muestra está fijo, la teoría continua revela propiedades del plan óptimo que no son visibles en el caso discreto. Por ejemplo, el teorema de Brenier — que estudiaremos en el Capítulo 9 — garantiza que cuando μ es absolutamente continua, el plan óptimo para el costo cuadrático está concentrado en el gráfico de un mapa $T = \nabla u$. En el caso discreto, el plan óptimo en general no tiene esa forma: varios puntos x_i pueden enviar masa a varios destinos y_j simultáneamente. Saber que el objeto continuo es un mapa con esa estructura permite diseñar métodos de aproximación que buscan ese mapa directamente, en lugar de conformarse con la matriz de transporte discreta.

En conclusión, la programación lineal es una herramienta indispensable para el cálculo numérico, pero la teoría continua es la que da sentido a los resultados y garantiza la consistencia de los métodos. Ambas perspectivas son complementarias.

Ejercicios

EJERCICIO 7.1 (Acoplamientos y covarianza). Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ con medias m_μ, m_ν y varianzas $\sigma_\mu^2, \sigma_\nu^2$, y sea (X, Y) un vector aleatorio con ley $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$.

- (a) Probar que $\mathbb{E}|X - Y|^2 = (m_\mu - m_\nu)^2 + \sigma_\mu^2 + \sigma_\nu^2 - 2 \operatorname{Cov}(X, Y)$, de modo que minimizar el costo cuadrático equivale a maximizar la covarianza (o la correlación) del acoplamiento.
- (b) Probar la cota de Cauchy–Schwarz $\operatorname{Cov}(X, Y) \leq \sigma_\mu \sigma_\nu$ y deducir que

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \mathbb{E}|X - Y|^2 \geq (m_\mu - m_\nu)^2 + (\sigma_\mu - \sigma_\nu)^2.$$

- (c) Probar que hay igualdad en (b) si y sólo si $Y = aX + b$ casi seguramente con $a > 0$; por lo tanto la cota de (b) se alcanza si y sólo si ν es la imagen de μ por una afinidad creciente (por ejemplo, si ambas son gaussianas). En el Capítulo 8 se identifica el acoplamiento que realiza el mínimo en general.

EJERCICIO 7.2 (Cotas de Fréchet–Hoeffding). Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ con funciones de distribución F_μ, F_ν , y $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ con función de distribución conjunta $H(x, y) = \pi((-\infty, x] \times (-\infty, y])$.

- (a) Probar que $\max\{F_\mu(x) + F_\nu(y) - 1, 0\} \leq H(x, y) \leq \min\{F_\mu(x), F_\nu(y)\}$ para todo (x, y) .
- (b) Probar que ambas cotas son funciones de distribución de elementos de $\Pi(\mu, \nu)$. (La cota superior es el plan comonótono del Capítulo 8; la inferior, el “antimonótono”).

EJERCICIO 7.3 (Matching estable: un ejemplo). Dos trabajadores $\{x_1, x_2\}$ y dos empresas $\{y_1, y_2\}$ generan, al emparejarse, el excedente $U(x_i, y_j) = u_{ij}$ con $u = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Todos los agentes tienen el mismo peso.

- (a) Hallar el matching que maximiza el excedente total y compararlo con el matching “codicioso” que asigna primero el par de mayor excedente.
- (b) Hallar un sistema de precios (φ, ψ) (salarios y beneficios) con $\varphi_i + \psi_j \geq u_{ij}$ para todo par y con igualdad en los pares emparejados. Verificar que es un equilibrio: ningún par no emparejado puede repartirse su excedente de modo que ambos mejoren.
- (c) Describir todos los sistemas de precios de equilibrio y observar que forman un segmento, aunque el matching óptimo sea único. ¿Quién se apropia del excedente en cada extremo del segmento?

EJERCICIO 7.4 (Un criterio de optimalidad multimarginal). Sean $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto y $\gamma \in \Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)$ un plan multimarginal concentrado en el conjunto $\{(x_1, \dots, x_N) : x_1 + \dots + x_N = v\}$ para algún $v \in \mathbb{R}^d$.

- (a) Probar que necesariamente $v = \sum_i \int x d\mu_i$.
- (b) Probar que γ es óptimo para todo costo de la forma $c(x_1, \dots, x_N) = h(x_1 + \dots + x_N)$ con $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. *Sugerencia:* desigualdad de Jensen.

- (c) Probar que γ es óptimo para el costo $c(x_1, \dots, x_N) = -\sum_{i \neq j} |x_i - x_j|^2$. *Sugerencia:* expandir los cuadrados y observar que $\sum_i |x_i|^2$ tiene integral fija sobre $\Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)$, de modo que el problema equivale a (b) con $h(z) = |z|^2$.
- (d) ¿Existe siempre un plan como γ ? Estudiar el caso $N = 2$, $\mu_1 = \mu_2 = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$, y el caso $N = 2$ con μ_1 uniforme en $[0, 1]$ y $\mu_2 = \delta_0$.

EJERCICIO 7.5 (Discretización y estabilidad). Sean X, Y compactos, $c \in C(X \times Y)$, y $\mu_n \rightharpoonup \mu$, $\nu_n \rightharpoonup \nu$.

- (a) Dado $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$, probar que existen $\gamma_n \in \Pi(\mu_n, \nu_n)$ con $\gamma_n \rightharpoonup \gamma$. *Sugerencia:* sean $\alpha_n \in \Pi(\mu_n, \mu)$ y $\beta_n \in \Pi(\nu, \nu_n)$ planes óptimos para el costo $d(x, x')^2$ (o cualquier costo continuo que se anule exactamente en la diagonal); pegar α_n , γ y β_n con el Lema A.3.1 y proyectar sobre las coordenadas extremas. Probar que $\int d(x, x')^2 d\alpha_n \rightarrow 0$ y usarlo para pasar al límite.
- (b) Deducir que $\mathcal{T}_c(\mu_n, \nu_n) \rightarrow \mathcal{T}_c(\mu, \nu)$, donde $\mathcal{T}_c$ denota el costo óptimo, y más generalmente que $\mathcal{T}_{c_n}(\mu_n, \nu_n) \rightarrow \mathcal{T}_c(\mu, \nu)$ si $c_n \rightarrow c$ uniformemente.
- (c) Concluir que si μ_n, ν_n son discretizaciones (por ejemplo, medidas empíricas) de μ, ν , el costo óptimo discreto calculado por programación lineal converge al costo óptimo continuo, y que los planes discretos óptimos convergen, salvo subsucesión, a planes óptimos continuos.

Transporte óptimo en dimensión uno

El caso unidimensional del transporte óptimo es especialmente rico: la estructura ordenada de la recta real permite construir explícitamente el mapa de transporte óptimo y probar su optimalidad de manera directa. Más aún, a diferencia de lo que ocurre en dimensión superior, el mismo mapa resulta óptimo para toda una familia de costos convexos simultáneamente.

En este capítulo desarrollamos la teoría del transporte óptimo en $\mathbb{R}$. Comenzamos introduciendo las herramientas fundamentales: la función de distribución acumulada y su pseudoinversa. A partir de ellas construimos el *mapa de transporte monótono*, que resulta ser el mapa óptimo para costos convexos. La herramienta clave para probar la optimalidad es la noción de *c-monotonicidad cíclica*, que presentamos en la tercera sección y que reaparecerá de manera central en el estudio del caso general.

8.1. Función de distribución y pseudoinversa

Empecemos con una definición que nos será de gran utilidad.

DEFINICIÓN 8.1.1 (Función de distribución acumulada). Dada una medida de probabilidad $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, su *función de distribución acumulada* (FDA) es la función $F_\mu: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ definida por

$$F_\mu(x) = \mu((-\infty, x]).$$

La FDA está bien definida para toda medida de Borel y satisface las siguientes propiedades inmediatas:

1. F_μ es monótona no decreciente.
2. F_μ es continua por la derecha, es decir, $\lim_{y \rightarrow x^+} F_\mu(y) = F_\mu(x)$.
3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_\mu(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_\mu(x) = 1$.

La continuidad por la derecha se sigue de que los intervalos $(-\infty, x_n]$ con $x_n \searrow x$ tienen intersección $(-\infty, x]$, y la continuidad por la izquierda falla en los átomos de μ : si $\mu(\{x\}) > 0$, entonces

$$F_\mu(x) - \lim_{y \rightarrow x^-} F_\mu(y) = \mu(\{x\}) > 0.$$

En particular, F_μ es continua en x si y sólo si $\mu(\{x\}) = 0$.

OBSERVACIÓN 8.1.2. La FDA caracteriza completamente a la medida μ . En efecto, conocer F_μ determina μ sobre los intervalos de la forma $(-\infty, x]$, que generan la σ -álgebra de Borel de $\mathbb{R}$.

Cuando μ no tiene átomos, F_μ es continua y estrictamente creciente en el soporte de μ , por lo que admite una inversa bien definida. En el caso general, sin embargo, F_μ

puede ser constante en intervalos (cuando μ no carga esa región) o tener saltos (en los átomos de μ), de modo que la inversa usual no existe. Para subsanar esto se introduce la *pseudoinversa*.

DEFINICIÓN 8.1.3 (Pseudoinversa). Sea $F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ monótona no decreciente y continua por la derecha. Su *pseudoinversa* es la función $F^{[-1]}: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F^{[-1]}(t) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F(x) \geq t\}.$$

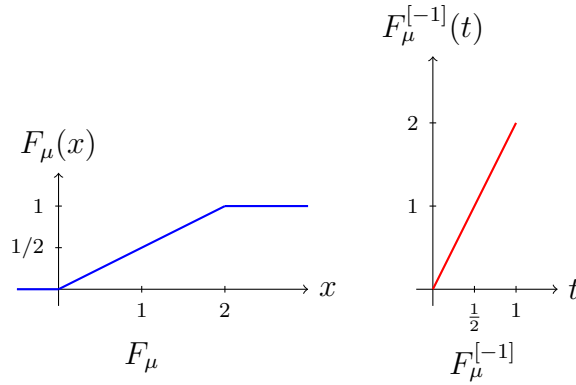
Ilustramos la definición de la pseudoinversa mediante tres ejemplos representativos, que cubren los casos más habituales: medida absolutamente continua, medida discreta y medida mixta.

EJEMPLO 8.1.4 (Medida uniforme). Sea $\mu = \mathcal{L}^1|_{[0,2]}/2$ la medida uniforme en $[0, 2]$. Su FDA es

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Como F_μ es estrictamente creciente y continua en $[0, 2]$, la pseudoinversa coincide con la inversa usual:

$$F_\mu^{[-1]}(t) = 2t, \quad t \in (0, 1).$$



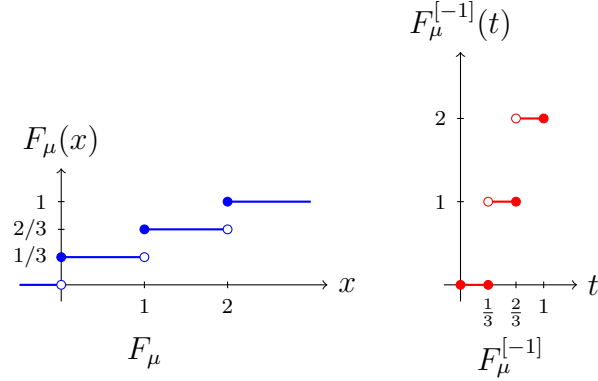
EJEMPLO 8.1.5 (Medida discreta). Sea $\mu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{1}{3}\delta_1 + \frac{1}{3}\delta_2$. Su FDA es la función escalera

$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{3}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{2}{3}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

La FDA tiene saltos en $x = 0, 1, 2$ y es constante entre ellos. Su pseudoinversa es

$$F_\mu^{[-1]}(t) = \begin{cases} 0, & t \in (0, \frac{1}{3}], \\ 1, & t \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}], \\ 2, & t \in (\frac{2}{3}, 1). \end{cases}$$

Obsérvese que $F_\mu^{[-1]}$ toma los valores $0, 1, 2$ en intervalos de longitud $1/3$ cada uno, consistentemente con el hecho de que $(F_\mu^{[-1]})_\# \mathcal{L}^1|_{(0,1)} = \mu$.



Este ejemplo ilustra una propiedad importante: la FDA de una medida discreta tiene saltos y es constante entre ellos, mientras que su pseudoinversa es constante en intervalos y tiene saltos. En cierto sentido, F_μ y $F_\mu^{[-1]}$ intercambian los roles de saltos y tramos planos.

EJEMPLO 8.1.6 (Medida mixta). Sea $\mu = \frac{1}{2}\mathcal{L}^1|_{[0,1]} + \frac{1}{2}\delta_2$, es decir, la mitad de la masa está distribuida uniformemente en $[0, 1]$ y la otra mitad está concentrada en el punto $x = 2$. Su FDA es

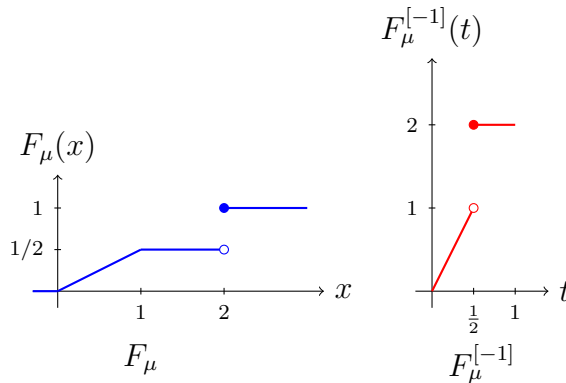
$$F_\mu(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{1}{2}, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

La FDA tiene una parte estrictamente creciente en $[0, 1]$, un tramo constante en $[1, 2)$ (donde μ no tiene masa) y un salto de tamaño $1/2$ en $x = 2$.

Su pseudoinversa es

$$F_\mu^{[-1]}(t) = \begin{cases} 2t, & t \in (0, \frac{1}{2}), \\ 2, & t \in [\frac{1}{2}, 1). \end{cases}$$

Obsérvese que el tramo plano de F_μ en $[1, 2)$ da lugar a un salto en $F_\mu^{[-1]}$ en $t = 1/2$: la pseudoinversa salta de $\lim_{t \rightarrow (1/2)^-} F_\mu^{[-1]}(t) = 1$ a $F_\mu^{[-1]}(1/2) = 2$. Recíprocamente, el salto de F_μ en $x = 2$ da lugar a un tramo plano de $F_\mu^{[-1]}$ en $[1/2, 1)$.



Este ejemplo pone de manifiesto la simetría entre F_μ y $F_\mu^{[-1]}$: los tramos planos de una corresponden a los saltos de la otra, y viceversa.

Observemos que el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq t\}$ es no vacío para todo $t \in (0, 1)$ (pues $F(x) \rightarrow 1$ cuando $x \rightarrow +\infty$) y acotado por abajo (pues $F(x) \rightarrow 0$ cuando $x \rightarrow -\infty$), así que el ínfimo es finito. La continuidad por la derecha de F garantiza además que el ínfimo es un mínimo.

La pseudoinversa satisface la siguiente relación fundamental, que utilizaremos repetidamente:

$$(8.1.1) \quad F^{[-1]}(t) \leq x \iff F(x) \geq t.$$

En efecto, si $F^{[-1]}(t) \leq x$, entonces $x \in \{z : F(z) \geq t\}$ por la continuidad por la derecha de F , luego $F(x) \geq t$. El recíproco es inmediato por definición del ínfimo.

PROPOSICIÓN 8.1.7. *Sea $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y sea F_μ su FDA. Entonces*

$$(F_\mu^{[-1]})_\# \mathcal{L}^1|_{(0,1)} = \mu.$$

Es decir, si U es una variable aleatoria con distribución uniforme en $(0, 1)$, entonces $F_\mu^{[-1]}(U)$ tiene distribución μ .

DEMOSTRACIÓN. Por (8.1.1), para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{L}^1(\{t \in (0, 1) : F_\mu^{[-1]}(t) \leq x\}) = \mathcal{L}^1(\{t \in (0, 1) : F_\mu(x) \geq t\}) = F_\mu(x),$$

que es precisamente la FDA de μ evaluada en x . Como la FDA caracteriza a la medida, concluimos que $(F_\mu^{[-1]})_\# \mathcal{L}^1|_{(0,1)} = \mu$. $\square$

El siguiente lema es fundamental para la construcción del mapa monótono.

LEMA 8.1.8. *Si $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ no tiene átomos, entonces*

$$(F_\mu)_\# \mu = \mathcal{L}^1|_{(0,1)}.$$

Además, para todo $\ell \in (0, 1)$, el conjunto $\{x : F_\mu(x) = \ell\}$ tiene μ -medida cero.

DEMOSTRACIÓN. Como μ no tiene átomos, F_μ es continua. Para $a \in (0, 1)$, el conjunto $\{x : F_\mu(x) \leq a\} = (-\infty, x_a]$ donde $F_\mu(x_a) = a$ (por continuidad y por los límites en $\pm\infty$). Entonces

$$\mu(\{x : F_\mu(x) \leq a\}) = \mu((-\infty, x_a]) = F_\mu(x_a) = a,$$

lo que prueba $(F_\mu)_\# \mu = \mathcal{L}^1|_{(0,1)}$.

Para la segunda afirmación, si $\mu(\{x : F_\mu(x) = \ell\}) > 0$, entonces la medida imagen $(F_\mu)_\# \mu$ tendría un átomo en ℓ , lo que contradice que es la medida de Lebesgue. $\square$

8.2. El mapa de transporte monótono

TEOREMA 8.2.1 (Mapa monótono). *Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ con μ sin átomos. Entonces existe un mapa medible monótono no decreciente $T_{mon} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $(T_{mon})_\# \mu = \nu$, y es único μ -c.t.p.*

Dicho mapa está dado explícitamente por

$$T_{mon}(x) = F_\nu^{[-1]}(F_\mu(x)).$$

DEMOSTRACIÓN. **Existencia.** Definamos $T_{\text{mon}}(x) = F_{\nu}^{[-1]}(F_{\mu}(x))$.

Por el Lema 8.1.8, $F_{\mu}(x) \in (0, 1)$ para μ -casi todo x , así que T_{mon} está bien definido μ -c.t.p. Es monótono no decreciente por ser composición de dos funciones monótonas no decrecientes.

Para verificar $(T_{\text{mon}})_{\#}\mu = \nu$ usamos la Proposición 8.1.7 y el Lema 8.1.8:

$$(T_{\text{mon}})_{\#}\mu = (F_{\nu}^{[-1]})_{\#}(F_{\mu})_{\#}\mu = (F_{\nu}^{[-1]})_{\#}\mathcal{L}^1|_{(0,1)} = \nu.$$

Unicidad. Sea T cualquier mapa monótono no decreciente con $T_{\#}\mu = \nu$. De la monotonicidad se tiene $T^{-1}((-\infty, T(x)]) \supset (-\infty, x]$, y por lo tanto

$$F_{\mu}(x) = \mu((-\infty, x]) \leq \mu(T^{-1}((-\infty, T(x)])) = \nu((-\infty, T(x)]) = F_{\nu}(T(x)),$$

lo que por (8.1.1) implica $T(x) \geq F_{\nu}^{[-1]}(F_{\mu}(x)) = T_{\text{mon}}(x)$.

Supongamos que $T(x) > T_{\text{mon}}(x)$ para algún x , y sea $\varepsilon > 0$ tal que $T(x) - \varepsilon > T_{\text{mon}}(x) = F_{\nu}^{[-1]}(F_{\mu}(x))$. Por (8.1.1),

$$F_{\nu}(T(x) - \varepsilon) \geq F_{\mu}(x).$$

Por otro lado, la monotonicidad de T da $T^{-1}((-\infty, T(x) - \varepsilon]) \subset (-\infty, x)$: en efecto, si $z \geq x$ entonces $T(z) \geq T(x) > T(x) - \varepsilon$. Por lo tanto

$$F_{\nu}(T(x) - \varepsilon) = \mu(T^{-1}((-\infty, T(x) - \varepsilon])) \leq \mu((-\infty, x)) \leq F_{\mu}(x).$$

En consecuencia $F_{\nu}(T(x) - \varepsilon) = F_{\mu}(x)$ y, como esto vale para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, F_{ν} es constante con valor $F_{\mu}(x)$ sobre un intervalo no degenerado.

Ahora bien, los niveles $\ell \in (0, 1)$ sobre los que F_{ν} es constante en un intervalo no degenerado forman un conjunto a lo sumo numerable, pues los intervalos correspondientes son disjuntos dos a dos. Para cada uno de esos niveles, el Lema 8.1.8 asegura que $\mu(\{x : F_{\mu}(x) = \ell\}) = 0$, y una unión numerable de conjuntos μ -nulos es μ -nula. Concluimos que $T(x) = T_{\text{mon}}(x)$ para μ -c.t.p. x . $\square$

El mapa monótono induce un plan de transporte especial entre μ y ν , pero tiene interés independiente construir un plan de transporte monótono incluso cuando μ tiene átomos (en cuyo caso el mapa monótono puede no existir).

DEFINICIÓN 8.2.2 (Plan comonótono). Dados $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$, el *plan comonótono* entre μ y ν es la medida

$$\gamma_{\text{mon}} = (F_{\mu}^{[-1]}, F_{\nu}^{[-1]})_{\#}\mathcal{L}^1|_{(0,1)} \in \Pi(\mu, \nu).$$

Que $\gamma_{\text{mon}} \in \Pi(\mu, \nu)$ se sigue de la Proposición 8.1.7. Cuando μ no tiene átomos, el plan comonótono está inducido por el mapa monótono: $\gamma_{\text{mon}} = (\text{id}, T_{\text{mon}})_{\#}\mu$. En efecto, tenemos,

PROPOSICIÓN 8.2.3. Si μ no tiene átomos, el plan comonótono está inducido por el mapa monótono del Teorema 8.2.1:

$$\gamma_{\text{mon}} = (\text{id}, T_{\text{mon}})_{\#}\mu.$$

DEMOSTRACIÓN. Escribamos $\lambda = \mathcal{L}^1|_{(0,1)}$. Recordemos que, por el Lema 8.1.8, $F_{\mu}(x) \in (0, 1)$ para μ -c.t.p. x , de modo que $T_{\text{mon}} = F_{\nu}^{[-1]} \circ F_{\mu}$ está definido μ -c.t.p. y la medida $(\text{id}, T_{\text{mon}})_{\#}\mu$ tiene sentido.

Paso 1: $F_\mu \circ F_\mu^{[-1]} = \text{id}$ en $(0, 1)$. Sea $t \in (0, 1)$ y $x_t = F_\mu^{[-1]}(t)$. Como observamos al introducir la pseudoinversa, la continuidad por la derecha de F_μ garantiza que el ínfimo que la define es un mínimo, de modo que $F_\mu(x_t) \geq t$. Por otra parte, si $x < x_t$ entonces $x \notin \{z : F_\mu(z) \geq t\}$, es decir, $F_\mu(x) < t$. Como μ no tiene átomos, F_μ es continua, y haciendo $x \uparrow x_t$ obtenemos $F_\mu(x_t) \leq t$. Por lo tanto

$$F_\mu(F_\mu^{[-1]}(t)) = t \quad \text{para todo } t \in (0, 1).$$

Paso 2: conclusión. Por la Proposición 8.1.7, $\mu = (F_\mu^{[-1]})_\# \lambda$. Usando la regla de composición de medidas imagen, $(S \circ R)_\# \lambda = S_\#(R_\# \lambda)$, resulta

$$(\text{id}, T_{\text{mon}})_\# \mu = (\text{id}, T_{\text{mon}})_\# ((F_\mu^{[-1]})_\# \lambda) = ((\text{id}, T_{\text{mon}}) \circ F_\mu^{[-1]})_\# \lambda = (F_\mu^{[-1]}, F_\nu^{[-1]} \circ F_\mu \circ F_\mu^{[-1]})_\# \lambda.$$

Por el Paso 1, $F_\nu^{[-1]} \circ F_\mu \circ F_\mu^{[-1]} = F_\nu^{[-1]}$ en $(0, 1)$, y por lo tanto

$$(\text{id}, T_{\text{mon}})_\# \mu = (F_\mu^{[-1]}, F_\nu^{[-1]})_\# \lambda = \gamma_{\text{mon}},$$

que es lo que queríamos demostrar. $\square$

OBSERVACIÓN 8.2.4. La hipótesis de que μ no tenga átomos se usa únicamente en el Paso 1. Si μ tiene un átomo en x_0 , entonces F_μ salta en x_0 y $F_\mu(F_\mu^{[-1]}(t)) > t$ para todo t en el interior del salto: la composición $F_\mu \circ F_\mu^{[-1]}$ «aplata» todo ese intervalo de valores de t en el único valor $F_\mu(x_0)$, y con ello T_{mon} enviaría toda la masa de x_0 a un solo punto, mientras que γ_{mon} la reparte. Es exactamente el fenómeno del ejemplo de la Sección 3b del cuaderno de cómputo.

El plan comonótono puede caracterizarse por una propiedad de monotonicidad de su soporte:

PROPOSICIÓN 8.2.5. *Sea $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$ un plan de transporte que satisface*

$$(x, y), (x', y') \in \text{sop}(\gamma), \quad x < x' \implies y \leq y'.$$

Entonces $\gamma = \gamma_{\text{mon}}$.

DEMOSTRACIÓN. Veremos que

$$(8.2.1) \quad \gamma((-\infty, a] \times (-\infty, b]) = \min\{F_\mu(a), F_\nu(b)\} \quad \text{para todo } a, b \in \mathbb{R},$$

y que γ_{mon} verifica la misma identidad. Como los rectángulos $(-\infty, a] \times (-\infty, b]$ forman un π -sistema que genera los borelianos de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (ver [5]), dos medidas de probabilidad que coinciden en ellos son iguales.

Escribamos $A = (-\infty, a] \times (-\infty, b]$. Como γ tiene marginales μ y ν ,

$$\gamma(A) \leq \gamma((-\infty, a] \times \mathbb{R}) = F_\mu(a), \quad \gamma(A) \leq \gamma(\mathbb{R} \times (-\infty, b]) = F_\nu(b),$$

de modo que $\gamma(A) \leq \min\{F_\mu(a), F_\nu(b)\}$.

Para la desigualdad recíproca, consideremos

$$B = (-\infty, a] \times (b, +\infty), \quad C = (a, +\infty) \times (-\infty, b],$$

y observemos que

$$\gamma(B) = F_\mu(a) - \gamma(A), \quad \gamma(C) = F_\nu(b) - \gamma(A).$$

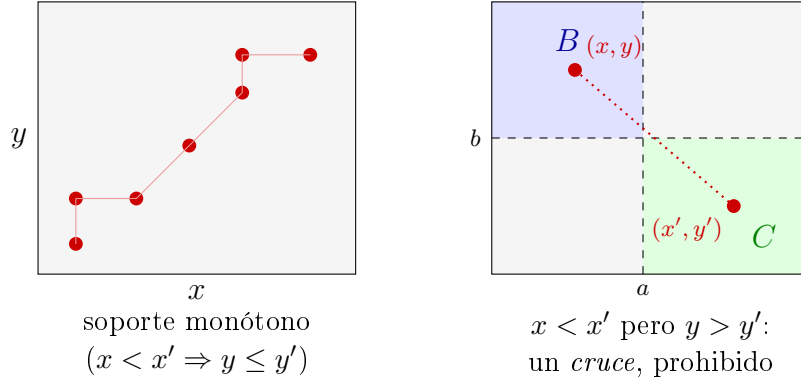


FIGURA 8.1. La condición de monotonía del soporte y la demostración de la Proposición 8.2.5. A la izquierda, un soporte que satisface la condición: al recorrerlo de izquierda a derecha nunca se baja. A la derecha, el argumento por el absurdo: si tanto $B = (-\infty, a] \times (b, +\infty)$ como $C = (a, +\infty) \times (-\infty, b]$ tuvieran masa positiva, habría un punto del soporte en cada una de ellas, y ese par formaría un cruce. Por lo tanto una de las dos regiones es γ -nula, y $\gamma((-\infty, a] \times (-\infty, b]) = \min\{F_\mu(a), F_\nu(b)\}$.

Afirmamos que $\gamma(B) = 0$ o $\gamma(C) = 0$. En efecto, supongamos que ambos son positivos. Si un boreliano tiene γ -medida positiva, necesariamente corta al soporte de γ (de lo contrario estaría contenido en el complemento del soporte, que es γ -nulo). Existen entonces

$$(x, y) \in \text{sop}(\gamma) \cap B, \quad (x', y') \in \text{sop}(\gamma) \cap C,$$

es decir, $x \leq a < x'$ e $y > b \geq y'$. Pero entonces $x < x'$ e $y > y'$, lo que contradice la hipótesis de monotonía del soporte.

Por lo tanto $\min\{F_\mu(a) - \gamma(A), F_\nu(b) - \gamma(A)\} = 0$, es decir, $\gamma(A) = \min\{F_\mu(a), F_\nu(b)\}$, que es (8.2.1).

Resta ver que γ_{mon} satisface la misma identidad. Por definición y por (8.1.1),

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{mon}}(A) &= \mathcal{L}^1(\{t \in (0, 1) : F_\mu^{[-1]}(t) \leq a, F_\nu^{[-1]}(t) \leq b\}) \\ &= \mathcal{L}^1(\{t \in (0, 1) : t \leq F_\mu(a), t \leq F_\nu(b)\}) \\ &= \min\{F_\mu(a), F_\nu(b)\}. \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. $\square$

8.3. c -monotonía cíclica

La noción de c -monotonía cíclica es la herramienta fundamental para caracterizar los soportes de los planes óptimos. La definimos aquí en el contexto general de $\mathbb{R}$, pero la usaremos de manera esencial en la demostración de la optimalidad del mapa monótono.

DEFINICIÓN 8.3.1 (c -monotonía cíclica). Sea $c: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función de costo. Un conjunto $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ se dice c -cíclicamente monótono (o c -CM) si para todo

$N \geq 2$ y todo conjunto de puntos $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \in \Gamma$ se tiene

$$\sum_{i=1}^N c(x_i, y_i) \leq \sum_{i=1}^N c(x_i, y_{\sigma(i)})$$

para toda permutación σ de $\{1, \dots, N\}$.

Intuitivamente, la condición dice que no es posible reducir el costo total redistribuyendo los destinos entre los orígenes de ninguna manera.

El resultado fundamental es que el soporte de todo plan óptimo es c -cíclicamente monótono.

TEOREMA 8.3.2. *Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ medidas con soporte compacto y sea $c: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $\gamma^* \in \Pi(\mu, \nu)$ es un plan de transporte óptimo para el costo c , entonces $\text{sop}(\gamma^*)$ es c -cíclicamente monótono.*

DEMOSTRACIÓN. Sean $X = \text{sop}(\mu)$ e $Y = \text{sop}(\nu)$, que por hipótesis son compactos, y sea c continua en $X \times Y$. Por el teorema de existencia de potenciales de Kantorovich del Capítulo 6, existe un par óptimo (φ, ψ) para el problema dual, con $\varphi \in C(X)$ y $\psi \in C(Y)$.

Por la Proposición 6.3.2 —y es aquí donde se usa la compacidad— vale la inclusión

$$\text{sop}(\gamma^*) \subset \Gamma_{\varphi, \psi} = \{(x, y) : \varphi(x) + \psi(y) = c(x, y)\},$$

es decir, la condición de saturación se verifica en *todo* punto del soporte de γ^* , y no solamente γ^* -c.t.p.

Sean ahora $(x_1, y_1), \dots, (x_N, y_N) \in \text{sop}(\gamma^*)$ y sea σ una permutación de $\{1, \dots, N\}$. Por lo anterior, $\varphi(x_i) + \psi(y_i) = c(x_i, y_i)$ para todo i . Sumando en i y usando que σ es una biyección, de modo que $\sum_i \psi(y_i) = \sum_i \psi(y_{\sigma(i)})$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^N c(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^N \varphi(x_i) + \sum_{i=1}^N \psi(y_i) = \sum_{i=1}^N [\varphi(x_i) + \psi(y_{\sigma(i)})] \leq \sum_{i=1}^N c(x_i, y_{\sigma(i)}),$$

donde la última desigualdad es simplemente la admisibilidad del par (φ, ψ) . $\square$

OBSERVACIÓN 8.3.3. La hipótesis de soporte compacto interviene únicamente para garantizar la existencia de potenciales de Kantorovich *continuos* y, con ella, la inclusión $\text{sop}(\gamma^*) \subset \Gamma_{\varphi, \psi}$. Sin continuidad, la saturación vale γ^* -c.t.p. pero no necesariamente en todo punto del soporte, y el argumento anterior se cae.

El teorema es cierto en total generalidad —para $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ arbitrarias y c continua— pero su demostración en ese caso no puede apoyarse en la dualidad: se razona directamente, construyendo a partir de una violación de la c -monotonía cíclica un plan competidor de costo estrictamente menor. Véase [19, Theorem 1.38].

OBSERVACIÓN 8.3.4. El recíproco también es cierto bajo hipótesis adecuadas: si el soporte de un plan $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$ es c -cíclicamente monótono, entonces γ es óptimo. Este resultado, más delicado, no lo demostraremos aquí; puede consultarse en [19, Theorem 1.38–1.39].

En dimensión uno, la c -monotonidad cíclica tiene una consecuencia especialmente concreta. Cuando el costo satisface la *condición de twist*

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}(x, y) < 0 \quad \text{para todo } (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

todo conjunto c -cíclicamente monótono es *monótono* en el siguiente sentido: si contiene dos pares (x, y) y (x', y') con $x < x'$, entonces necesariamente $y \leq y'$. En particular, el soporte de cualquier plan óptimo está contenido en el gráfico de una relación no decreciente.

PROPOSICIÓN 8.3.5. *Supongamos que $c: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es de clase C^2 y satisface $\partial^2 c / \partial x \partial y < 0$. Si $\Gamma \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es c -cíclicamente monótono, entonces*

$$(x, y), (x', y') \in \Gamma, \quad x < x' \implies y \leq y'.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos por contradicción que $(x, y), (x', y') \in \Gamma$ con $x < x'$ e $y > y'$. La c -monotonidad cíclica con $N = 2$ y la permutación no trivial da

$$c(x, y) + c(x', y') \leq c(x, y') + c(x', y),$$

es decir, $c(x, y) - c(x, y') \leq c(x', y) - c(x', y')$. Definamos $\phi(s) = c(s, y) - c(s, y')$; la desigualdad anterior dice $\phi(x) \leq \phi(x')$. Sin embargo, como c es de clase C^2 e $y > y'$,

$$\phi'(s) = \frac{\partial c}{\partial x}(s, y) - \frac{\partial c}{\partial x}(s, y') = \int_{y'}^y \frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}(s, t) dt < 0,$$

de modo que ϕ es estrictamente decreciente y $\phi(x) > \phi(x')$, contradicción. $\square$

OBSERVACIÓN 8.3.6. Obsérvese que en la demostración anterior sólo se usó la c -monotonidad cíclica con $N = 2$. La condición

$$c(x, y) + c(x', y') \leq c(x, y') + c(x', y)$$

se conoce como *condición de no cruce*: dice que intercambiar los destinos de dos partículas nunca reduce el costo. Es la forma más débil de la c -monotonidad cíclica y, en dimensión uno, ya es suficiente para forzar la monotonía del soporte.

8.4. Optimalidad del mapa monótono

TEOREMA 8.4.1 (Optimalidad del mapa monótono). *Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ con soporte compacto y sea $c: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Supongamos que se satisface una de las dos condiciones siguientes:*

- (i) $c(x, y) = h(y - x)$ con $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ estrictamente convexa, o bien
- (ii) c es de clase C^2 y $\partial^2 c / \partial x \partial y < 0$.

Entonces el plan comonótono γ_{mon} es el único plan de transporte óptimo. Si además μ no tiene átomos, $\gamma_{\text{mon}} = (\text{id}, T_{\text{mon}})_{\#} \mu$ y T_{mon} es el único mapa de transporte óptimo, μ -c.t.p.

DEMOSTRACIÓN. Como μ y ν tienen soporte compacto y c es continua, existe al menos un plan óptimo; sea γ^* uno cualquiera de ellos. Por el Teorema 8.3.2, $\text{sop}(\gamma^*)$ es c -cíclicamente monótono.

Veremos que, en ambos casos, el soporte de γ^* satisface la condición de monotonía

$$(8.4.1) \quad (x, y), (x', y') \in \text{sop}(\gamma^*), \quad x < x' \implies y \leq y'.$$

En el caso (ii), (8.4.1) es exactamente el contenido de la Proposición 8.3.5.

Veamos el caso (i). Supongamos, por el absurdo, que existen $(x, y), (x', y') \in \text{sop}(\gamma^*)$ con $x < x'$ e $y > y'$. La c -monotonicidad cíclica con $N = 2$ y la permutación no trivial da

$$h(y - x) + h(y' - x') \leq h(y' - x) + h(y - x').$$

Escribamos $a = y - x$, $b = y' - x'$ y $\delta = x' - x > 0$. Entonces

$$y' - x = (y' - x') + (x' - x) = b + \delta, \quad y - x' = (y - x) - (x' - x) = a - \delta,$$

de modo que la desigualdad anterior se escribe

$$(8.4.2) \quad h(a) + h(b) \leq h(b + \delta) + h(a - \delta).$$

Notemos que $b < a$, pues $b + \delta = y' - x < y - x = a$; y además

$$a - b = (y - x) - (y' - x') = (y - y') + (x' - x) = (y - y') + \delta > \delta,$$

ya que $y > y'$. Por lo tanto $0 < \delta < a - b$, y el número

$$t = \frac{\delta}{a - b}$$

pertenece a $(0, 1)$. Un cálculo directo muestra que

$$b + \delta = (1 - t)b + ta, \quad a - \delta = tb + (1 - t)a,$$

es decir, $b + \delta$ y $a - \delta$ son combinaciones convexas *propias* de a y b , con pesos intercambiados. Como h es estrictamente convexa y $a \neq b$,

$$h(b + \delta) < (1 - t)h(b) + th(a), \quad h(a - \delta) < th(b) + (1 - t)h(a),$$

y sumando ambas desigualdades,

$$h(b + \delta) + h(a - \delta) < h(a) + h(b),$$

lo que contradice (8.4.2). Queda probada (8.4.1).

Establecida (8.4.1), la Proposición 8.2.5 implica $\gamma^* = \gamma_{\text{mon}}$. Como γ^* era un plan óptimo arbitrario, γ_{mon} es el único plan óptimo.

Finalmente, si μ no tiene átomos, ya vimos que $\gamma_{\text{mon}} = (\text{id}, T_{\text{mon}})_{\#}\mu$. Si S es un mapa óptimo, entonces $(\text{id}, S)_{\#}\mu$ es un plan óptimo y por lo tanto coincide con $(\text{id}, T_{\text{mon}})_{\#}\mu$, de donde $S = T_{\text{mon}}$ μ -c.t.p. $\square$

OBSERVACIÓN 8.4.2. Las hipótesis (i) y (ii) se superponen parcialmente pero ninguna contiene a la otra. Si $c(x, y) = h(y - x)$ con h de clase C^2 , entonces

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x \partial y}(x, y) = -h''(y - x),$$

de modo que (ii) equivale a $h'' > 0$. La condición (i) no pide regularidad alguna sobre h —por ejemplo, $h(z) = |z|^{3/2}$ y $h(z) = z^2 + |z|$ son estrictamente convexas pero no de clase C^2 —, mientras que (ii) se aplica a costos que no son de la forma $h(y - x)$.

Queda pendiente el caso en que h es convexa pero no estrictamente. El argumento anterior no sirve: sin convexidad estricta la desigualdad (8.4.2) se verifica como igualdad y no hay contradicción alguna. El resultado sigue siendo cierto —aunque, como veremos, la unicidad se pierde— y se obtiene por un argumento de aproximación.

PROPOSICIÓN 8.4.3 (Costos convexos no estrictos). *Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ con soporte compacto y sea $c(x, y) = h(y - x)$ con $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Entonces el plan comonótono γ_{mon} es óptimo.*

DEMOSTRACIÓN. Para $\varepsilon > 0$ definimos

$$h_\varepsilon(z) = h(z) + \varepsilon z^2,$$

que es estrictamente convexa por ser suma de una función convexa y una estrictamente convexa. Por el Teorema 8.4.1 aplicado al costo $c_\varepsilon(x, y) = h_\varepsilon(y - x)$, el plan γ_{mon} —que no depende de ε — es óptimo para c_ε . Es decir, para todo $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$,

$$\int h(y - x) d\gamma_{mon} + \varepsilon \int (y - x)^2 d\gamma_{mon} \leq \int h(y - x) d\pi + \varepsilon \int (y - x)^2 d\pi.$$

Como $\text{sop}(\mu)$ y $\text{sop}(\nu)$ son compactos, existe $M > 0$ tal que $(y - x)^2 \leq M$ para todo $(x, y) \in \text{sop}(\mu) \times \text{sop}(\nu)$. Todo plan $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ está concentrado en ese producto, de modo que

$$0 \leq \int (y - x)^2 d\pi \leq M \quad \text{para todo } \pi \in \Pi(\mu, \nu).$$

Reordenando la desigualdad anterior,

$$\int h(y - x) d\gamma_{mon} \leq \int h(y - x) d\pi + \varepsilon \left(\int (y - x)^2 d\pi - \int (y - x)^2 d\gamma_{mon} \right) \leq \int h(y - x) d\pi + \varepsilon M.$$

Haciendo $\varepsilon \rightarrow 0^+$ obtenemos

$$\int h(y - x) d\gamma_{mon} \leq \int h(y - x) d\pi \quad \text{para todo } \pi \in \Pi(\mu, \nu),$$

es decir, γ_{mon} es óptimo. $\square$

OBSERVACIÓN 8.4.4. Sin convexidad estricta la unicidad se pierde genuinamente. El caso extremo es h afín, $h(z) = \alpha z + \beta$: en ese caso

$$\int h(y - x) d\pi = \alpha \left(\int_{\mathbb{R}} y d\nu(y) - \int_{\mathbb{R}} x d\mu(x) \right) + \beta$$

no depende de π , de modo que *todo* plan admisible es óptimo. Esto muestra que la hipótesis de convexidad estricta en el Teorema 8.4.1 no es un artefacto de la demostración.

Una consecuencia importante del teorema anterior es una fórmula explícita para el costo de transporte óptimo en términos de las funciones de distribución.

PROPOSICIÓN 8.4.5 (Fórmula del costo óptimo). *Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ con soporte compacto y sea $c(x, y) = h(y - x)$ con h convexa. Entonces el costo de transporte óptimo satisface*

$$\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int h(y - x) d\pi(x, y) = \int_0^1 h(F_\nu^{[-1]}(t) - F_\mu^{[-1]}(t)) dt.$$

En particular, para $h(z) = |z|^p$ con $p \geq 1$, el costo óptimo es

$$\int_0^1 |F_\nu^{[-1]}(t) - F_\mu^{[-1]}(t)|^p dt.$$

DEMOSTRACIÓN. Por la Proposición 8.4.3, el plan comonótono γ_{mon} es óptimo. Por definición de γ_{mon} ,

$$\int h(y-x) d\gamma_{mon}(x,y) = \int_0^1 h(F_\nu^{[-1]}(t) - F_\mu^{[-1]}(t)) dt,$$

donde hemos usado el cambio de variables inducido por la definición de γ_{mon} como imagen de la medida de Lebesgue en $(0,1)$. $\square$

OBSERVACIÓN 8.4.6. Para el costo $h(z) = |z|$ la fórmula anterior admite además la representación

$$\int_0^1 |F_\nu^{[-1]}(t) - F_\mu^{[-1]}(t)| dt = \int_{\mathbb{R}} |F_\mu(x) - F_\nu(x)| dx,$$

que expresa el costo óptimo como el área entre las gráficas de las dos funciones de distribución. Esto se verifica mediante el teorema de Fubini, intercambiando el rol de las funciones directas e inversas (ver la Proposición 2.17 de [19]). Las expresiones $\int_0^1 |F_\nu^{[-1]}(t) - F_\mu^{[-1]}(t)|^p dt$ reaparecerán más adelante como definición de las distancias de Wasserstein $W_p(\mu, \nu)$.

Ejercicios

EJERCICIO 8.1 (Mapas monótonos explícitos). Hallar T_{mon} y el plan comonótono γ_{mon} en los siguientes casos, y decidir cuándo γ_{mon} está inducido por un mapa.

- (a) $\mu = \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$, $\nu = e^{-y}\mathcal{L}^1|_{[0,\infty)}$.
- (b) $\mu = \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$, $\nu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_1$.
- (c) $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$, $\nu = \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$.
- (d) $\mu = N(m_0, \sigma_0^2)$, $\nu = N(m_1, \sigma_1^2)$; verificar que T_{mon} es afín y comparar con la Sección 9.2.

EJERCICIO 8.2 (Propiedades de la pseudoinversa). Sea $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ y $F_\mu^{[-1]}$ su pseudoinversa.

- (a) Probar que $F_\mu^{[-1]}$ es no decreciente y continua por la izquierda en $(0,1)$, y que $F_\mu^{[-1]}(t) \leq x \iff t \leq F_\mu(x)$ (desigualdad de Galois).
- (b) Probar que $\int_{\mathbb{R}} g d\mu = \int_0^1 g(F_\mu^{[-1]}(t)) dt$ para toda $g \geq 0$ medible; en particular $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R})$ si y sólo si $F_\mu^{[-1]} \in L^p(0,1)$.
- (c) Probar que si $G: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ es no decreciente y continua por la izquierda, entonces $G = F_{\bar{\mu}}^{[-1]}$ para $\bar{\mu} = G_{\#}\mathcal{L}^1|_{(0,1)}$. (Esto se usa en la Proposición 12.6.1.)
- (d) Deducir que $\mu \mapsto F_\mu^{[-1]}$ es una biyección de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ sobre el conjunto de funciones no decrecientes y continuas por la izquierda en $(0,1)$.

EJERCICIO 8.3 (Dominancia estocástica). Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sin átomos y con soporte igual a $\mathbb{R}$ (para simplificar). Probar que son equivalentes:

- (a) $F_\mu \geq F_\nu$ en $\mathbb{R}$;

- (b) existe $\gamma \in \Pi(\mu, \nu)$ concentrado en $\{(x, y) : y \geq x\}$;
- (c) existe T con $T_{\#}\mu = \nu$ y $T(x) \geq x$ para todo x ;
- (d) $T_{\text{mon}}(x) \geq x$ para todo x .

¿Qué hay que modificar si μ tiene átomos o el soporte no es todo $\mathbb{R}$?

EJERCICIO 8.4 (Costos con $\partial^2 c / \partial x \partial y > 0$). Sea $c \in C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ con $\partial^2 c / \partial x \partial y > 0$ y sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ con soporte compacto.

- (a) Probar el análogo de la Proposición 8.3.5: si Γ es c -cíclicamente monótono, entonces $(x, y), (x', y') \in \Gamma$ y $x < x'$ implican $y \geq y'$.
- (b) Definir el plan *antimonótono* γ_{anti} (el plan comonótono entre μ y $R_{\#}\nu$, con $R(y) = -y$, compuesto con R ; o bien la cota inferior del Ejercicio 7.2) y probar que es el único plan óptimo para c .
- (c) Aplicarlo a $c(x, y) = -|x - y|^2$ y a $c(x, y) = xy$: el problema de *maximizar* $\int |x - y|^2 d\pi$ (o de minimizar la covarianza del acoplamiento, Ejercicio 7.1) se resuelve con γ_{anti} .

EJERCICIO 8.5 (Costos cóncavos: el plan monótono no es óptimo). Sea $c(x, y) = |x - y|^{1/2}$, $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ y $\nu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$.

- (a) Calcular el costo de γ_{mon} y el del otro plan extremal de $\Pi(\mu, \nu)$, y concluir que γ_{mon} no es óptimo.
- (b) Explicar qué hipótesis del Teorema 8.4.1 falla, y verificar directamente que $\text{sop}(\gamma_{\text{mon}})$ no es c -cíclicamente monótono.
- (c) Probar que para $c(x, y) = h(|x - y|)$ con h estrictamente cóncava y creciente, la masa común de μ y ν conviene dejarla quieta: si $\mu \wedge \nu \neq 0$, todo plan óptimo coincide con $(\text{id}, \text{id})_{\#}(\mu \wedge \nu)$ sobre la diagonal. (Ver [19, Sec. 3.3.2] para la teoría general de costos cóncavos.)

EJERCICIO 8.6 (Densidades sin soporte pleno). (a) Construir un boreliano $A \subset [0, 1]$ tal que $0 < \mathcal{L}^1(I \cap A) < \mathcal{L}^1(I)$ para todo intervalo abierto $I \subset [0, 1]$. *Sugerencia*: unión numerable de conjuntos “de Cantor gordos” centrados en los racionales, con medidas que sumen menos que 1.

- (b) Sea $\mu = \mathcal{L}^1|_A / \mathcal{L}^1(A)$. Probar que F_{μ} es continua y estrictamente creciente en $[0, 1]$, de modo que $T_{\text{mon}}: \mu \rightarrow \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$ es un homeomorfismo de $[0, 1]$, aunque μ no tenga densidad positiva en ningún intervalo. ¿Es T_{mon} Lipschitz? ¿Y su inversa?

EJERCICIO 8.7 (★ Un costo singular en la diagonal). Sea $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ sin átomos y con soporte compacto, y $c(x, y) = 1/|x - y|$ (con $c = +\infty$ en la diagonal).

- (a) Probar que existe un plan óptimo $\gamma \in \Pi(\mu, \mu)$ con costo finito.
- (b) Probar que γ está concentrado en la unión de a lo sumo dos gráficos de funciones crecientes, uno por encima y otro por debajo de la diagonal, y que estos gráficos no se superponen; concluir que γ está inducido por un mapa T . ¿Es T creciente?
- (c) Para $\mu = \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$, hallar T explícitamente.

Ver los ejercicios del Capítulo 2 de [19] para indicaciones.

Ejercicios computacionales. Los ejercicios siguientes se resuelven con el cuaderno *OT en dimensión uno* (véase el Apéndice E); los enunciados figuran también al final del cuaderno. Las referencias a secciones son a las del cuaderno.

EJERCICIO 8.8 (Mapas monótonos explícitos). Calcular numéricamente T_{mon} para $\mu = \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$ y ν exponencial, para μ uniforme y $\nu = \frac{1}{3}\delta_0 + \frac{2}{3}\delta_1$, y para $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ y ν uniforme, y comparar con las fórmulas del Ejercicio 8.1. En el último caso, verificar que el plan comonótono *no* está inducido por un mapa y describirlo.

EJERCICIO 8.9 (Dominancia estocástica). Para pares (μ, ν) de muestras, verificar numéricamente la equivalencia entre $F_\mu \geq F_\nu$ y $T_{\text{mon}} \geq \text{id}$ del Ejercicio 8.3: graficar ambas condiciones para $\mu = N(0, 1)$ y $\nu = N(m, \sigma^2)$ con varios (m, σ) , y hallar la región del plano (m, σ) donde valen.

EJERCICIO 8.10 (Cotas de Fréchet–Hoeffding). Para μ, ν discretas con n átomos, calcular la función de distribución conjunta $H(x, y) = \pi((-\infty, x] \times (-\infty, y])$ de varios planes (el comonótono, el antimonótono, el producto y planes aleatorios) y verificar las cotas $\max\{F_\mu + F_\nu - 1, 0\} \leq H \leq \min\{F_\mu, F_\nu\}$ del Ejercicio 7.2, con igualdad para los planes extremos.

EJERCICIO 8.11 (Costos cóncavos). Con $\mu = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$ y $\nu = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_2)$, calcular el plan óptimo de $|x - y|^p$ para $p \in \{0,25, 0,5, 1, 2\}$ y determinar para qué p deja de ser óptimo el plan monótono. Repetir con dos densidades continuas que se superpongan y medir la masa que el plan óptimo deja en la diagonal como función de p (Ejercicio 8.5).

EJERCICIO 8.12 (La fórmula del área y $p > 1$). Verificar numéricamente que $W_1(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} |F_\mu - F_\nu| dx$ para muestras de distintas distribuciones, y que en cambio $W_2^2(\mu, \nu) \neq \int_{\mathbb{R}} |F_\mu - F_\nu|^2 dx$ (Ejercicio 10.5). Explicar la diferencia geométricamente con las figuras de la Sección 6 del cuaderno.

El teorema de factorización polar de Brenier

En los capítulos anteriores estudiamos el problema de Kantorovich con costos generales en espacios polacos y vimos que, si un plan óptimo π^* está inducido por un mapa T —es decir, $\pi^* = (\text{id}, T)_\# \mu$ —, entonces ese mapa resuelve el problema original de Monge.

En el Capítulo 6, Sección 6.4, estudiamos el caso $X = Y = \mathbb{R}^d$ con costo cuadrático $c(x, y) = |x - y|^2$. Vimos que si φ, ψ son potenciales de Kantorovich y definimos

$$u(x) = \frac{|x|^2 - \varphi(x)}{2}, \quad v(y) = \frac{|y|^2 - \psi(y)}{2},$$

entonces u y v son convexas, $v = \bar{u}$ y $u = \bar{v}$, donde $\bar{u}$ denota la transformada de Legendre de u . Más aún, la condición de saturación se reescribe como

$$u(x) + \bar{u}(y) = x \cdot y \quad \pi^*\text{-c.t.p.},$$

y, si u es de clase C^1 , esta identidad fuerza $y = \nabla u(x)$ para π^* -c.t.p. par (x, y) .

En esa misma sección vimos además que, si el plan óptimo π^* está inducido por un mapa T , entonces forzosamente $T = \nabla u$: el mapa de transporte óptimo, de existir, debe ser el gradiente de una función convexa. Pero ese argumento era condicional, y dejaba abierta la pregunta central: ¿existe efectivamente tal mapa?

Lo que faltaba, entonces, era mostrar que el plan óptimo está inducido por un mapa. Ese es el contenido del teorema de Brenier: bajo la hipótesis de que $\mu \ll \mathcal{L}^d$, el problema de Monge admite una única solución, dada por el gradiente de una función convexa.

9.1. El teorema de Brenier

En esta sección demostraremos el teorema de Brenier. Por razones de simplicidad haremos la demostración bajo la hipótesis adicional de que el potencial convexo u es de clase C^1 ; como veremos, en ese caso el argumento es completamente elemental y contiene ya todas las ideas esenciales. Al final de la sección discutiremos qué hay que modificar para tratar el caso general.

Trabajaremos con medidas de soporte compacto, que es el marco en el que demostramos la existencia de potenciales de Kantorovich en el Capítulo 6. En la Observación 9.1.7 comentaremos el caso general. Como el costo cuadrático involucra momentos de orden dos, conviene introducir la siguiente notación.

DEFINICIÓN 9.1.1. Dado $p \geq 1$, denotamos por $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ el espacio de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^d$ con momento de orden p finito:

$$\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) = \left\{ \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d) : \int_{\mathbb{R}^d} |x|^p d\mu(x) < \infty \right\}.$$

Observemos que toda medida de probabilidad con soporte compacto pertenece a $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ para todo $p \geq 1$.

El siguiente lema es el paso técnico que nos faltaba: nos permite pasar de saber que un plan *vive en el gráfico* de un mapa a saber que está *inducido* por ese mapa. Es un resultado puramente teórico-medida, que no usa nada de la teoría de transporte óptimo.

LEMA 9.1.2. Sean $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ y sea $T: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ una función boreliana. Denotemos por

$$\Gamma_T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d : y = T(x)\}$$

al gráfico de T . Si $\pi(\Gamma_T) = 1$, entonces

$$\pi = (\text{id}, T)_\# \mu.$$

En particular, $T_\# \mu = \nu$.

DEMOSTRACIÓN. Notemos primero que Γ_T es boreliano: la función $(x, y) \mapsto y - T(x)$ es boreliana y Γ_T es la preimagen del cerrado $\{0\}$.

Sea $f \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$. Como $\pi(\Gamma_T) = 1$, el complemento de Γ_T es π -nulo y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f d\pi = \int_{\Gamma_T} f(x, y) d\pi(x, y).$$

Ahora bien, sobre Γ_T se tiene $y = T(x)$, de modo que allí $f(x, y) = f(x, T(x))$. En consecuencia,

$$\int_{\Gamma_T} f(x, y) d\pi(x, y) = \int_{\Gamma_T} f(x, T(x)) d\pi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x, T(x)) d\pi(x, y),$$

donde en la última igualdad volvimos a usar que el complemento de Γ_T es π -nulo.

La función $(x, y) \mapsto f(x, T(x))$ depende únicamente de la variable x . Como la primera marginal de π es μ , es decir $(\mathbf{p}_1)_\# \pi = \mu$, resulta

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f(x, T(x)) d\pi(x, y) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, T(x)) d\mu(x).$$

Por otra parte, por definición de medida imagen,

$$\int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} f d((\text{id}, T)_\# \mu) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x, T(x)) d\mu(x).$$

Hemos probado entonces que

$$\int f d\pi = \int f d((\text{id}, T)_\# \mu) \quad \text{para toda } f \in C_b(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d),$$

y como dos medidas de probabilidad borelianas en un espacio polaco que integran igual a toda función continua y acotada coinciden (cf. Lema 2.3.7), concluimos que $\pi = (\text{id}, T)_\# \mu$.

Finalmente, como la segunda marginal de π es ν ,

$$\nu = (\mathbf{p}_2)_\# \pi = (\mathbf{p}_2)_\# ((\text{id}, T)_\# \mu) = (\mathbf{p}_2 \circ (\text{id}, T))_\# \mu = T_\# \mu,$$

que es lo que queríamos ver. $\square$

Ya estamos en condiciones de enunciar y demostrar el resultado principal.

TEOREMA 9.1.3 (Brenier, 1991). *Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ medidas con soporte compacto y supongamos que $\mu \ll \mathcal{L}^d$. Entonces:*

1. *Existe una función convexa $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que el mapa $T = \nabla u$, definido μ -c.t.p., verifica $T_{\#}\mu = \nu$ y resuelve el problema de Monge:*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x - T(x)|^2 d\mu(x) = \inf_{S_{\#}\mu = \nu} \int_{\mathbb{R}^d} |x - S(x)|^2 d\mu(x).$$

2. *El plan de Kantorovich óptimo es único y está dado por $\pi^* = (\text{id}, T)_{\#}\mu$.*
3. *El mapa óptimo es único: si $S_{\#}\mu = \nu$ es óptimo, entonces $S = T$ μ -c.t.p.*

DEMOSTRACIÓN. Demostraremos el resultado bajo la hipótesis simplificadora de que $u \in C^1(\mathbb{R}^d)$. El caso general requiere reemplazar el gradiente por el subdiferencial de u y usar el teorema de Rademacher; las herramientas necesarias están reunidas en el Apéndice D, y el argumento se completa en la Observación 9.1.5.

Paso 1: existencia de plan y potenciales óptimos. Sean $X = \text{sop}(\mu)$ e $Y = \text{sop}(\nu)$, que por hipótesis son compactos, y consideremos el costo $c(x, y) = |x - y|^2$, que es continuo en $X \times Y$. Por el teorema de existencia de planes óptimos existe un plan óptimo $\pi^* \in \Pi(\mu, \nu)$, y por el teorema de existencia de potenciales de Kantorovich del Capítulo 6 existe un par óptimo (φ, ψ) para el problema dual, con $\psi = \varphi^c$ y $\varphi = \psi^c$.

Definimos, como en la Sección 6.4,

$$u(x) = \frac{|x|^2 - \varphi(x)}{2}, \quad v(y) = \frac{|y|^2 - \psi(y)}{2}.$$

Allí vimos que u y v son convexas y que $v = \bar{u}$, $u = \bar{v}$.

Paso 2: el plan óptimo vive en el gráfico de ∇u . Por la Proposición 6.3.2, el plan óptimo π^* está concentrado en el conjunto de saturación asociado a (φ, ψ) , es decir

$$\varphi(x) + \psi(y) = |x - y|^2 \quad \pi^*\text{-c.t.p.}$$

Como vimos en la Sección 6.4, en términos de u y $\bar{u}$ esto equivale a

$$u(x) + \bar{u}(y) = x \cdot y \quad \pi^*\text{-c.t.p.},$$

y, siendo u de clase C^1 , esta identidad implica

$$y = \nabla u(x) \quad \pi^*\text{-c.t.p.}$$

Definiendo $T = \nabla u$, lo anterior dice exactamente que $\pi^*(\Gamma_T) = 1$.

Paso 3: el plan óptimo está inducido por T . Como $u \in C^1$, el mapa $T = \nabla u$ es continuo y en particular boreliano. Por el Lema 9.1.2,

$$\pi^* = (\text{id}, T)_{\#}\mu \quad \text{y} \quad T_{\#}\mu = \nu.$$

Paso 4: T resuelve el problema de Monge. Sea S cualquier mapa admisible, es decir $S_{\#}\mu = \nu$. Entonces $\pi_S = (\text{id}, S)_{\#}\mu$ es un plan admisible, y como π^* es óptimo,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x - T(x)|^2 d\mu(x) = \int |x - y|^2 d\pi^* \leq \int |x - y|^2 d\pi_S = \int_{\mathbb{R}^d} |x - S(x)|^2 d\mu(x).$$

Como T es admisible, T realiza el ínfimo del problema de Monge.

Paso 5: unicidad del plan óptimo. Sea $\tilde{\pi}$ otro plan óptimo cualquiera. El punto clave es que la Proposición 6.3.2 vale para *cualquier* plan óptimo enfrentado a *cualquier* par dual óptimo; en particular, podemos aplicarla a $\tilde{\pi}$ con el *mismo* par (φ, ψ) del Paso 1. Obtenemos así que $\tilde{\pi}$ está concentrado en el mismo conjunto de saturación y, repitiendo los Pasos 2 y 3,

$$\tilde{\pi} = (\text{id}, \nabla u)_{\#} \mu = \pi^*.$$

Paso 6: unicidad del mapa óptimo. Si $S_{\#} \mu = \nu$ es óptimo, entonces $(\text{id}, S)_{\#} \mu$ es un plan óptimo y, por el Paso 5, $(\text{id}, S)_{\#} \mu = (\text{id}, T)_{\#} \mu$. Evaluando ambas medidas en el boreliano $(\Gamma_T)^c$ obtenemos

$$\mu(\{x : S(x) \neq T(x)\}) = (\text{id}, S)_{\#} \mu((\Gamma_T)^c) = (\text{id}, T)_{\#} \mu((\Gamma_T)^c) = 0,$$

es decir, $S = T$ μ -c.t.p. □

OBSERVACIÓN 9.1.4. Es instructivo observar *dónde* se usó la hipótesis $\mu \ll \mathcal{L}^d$ en la demostración anterior: en ningún lado. Bajo la hipótesis $u \in C^1$ el argumento cierra sin necesidad de continuidad absoluta. Esto no es una casualidad ni un descuido: como veremos en la Observación 9.1.6, la hipótesis $u \in C^1$ es *incompatible* con los ejemplos en los que el teorema falla. La continuidad absoluta de μ es precisamente lo que permite reemplazar la hipótesis de regularidad $u \in C^1$ en el caso general.

OBSERVACIÓN 9.1.5 (El caso general). Sin la hipótesis $u \in C^1$, la demostración se modifica en un único punto: el Paso 2. La condición de saturación

$$u(x) + \bar{u}(y) = x \cdot y$$

equivale, como vimos, a

$$u(z) \geq u(x) + y \cdot (z - x) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}^d,$$

es decir, a que y pertenezca al *subdiferencial* $\partial u(x)$ (Definición D.2.1); esta equivalencia es exactamente la Proposición D.3.1.

Sin regularidad adicional, el subdiferencial puede contener más de un punto —es no vacío, convexo y compacto (Proposición D.2.2), pero no necesariamente un singleton— y la condición de saturación no determina un único y . Aquí es donde entra en juego la continuidad absoluta, a través del Corolario D.5.2: como u es convexa, existe un boreliano D con $\mathcal{L}^d(\mathbb{R}^d \setminus D) = 0$ en el que u es diferenciable y $\partial u(x) = \{\nabla u(x)\}$, y ∇u es boreliana en D .

Como $\mu \ll \mathcal{L}^d$, se tiene $\mu(\mathbb{R}^d \setminus D) = 0$. Por lo tanto, para μ -c.t.p. x la única elección posible es $y = \nabla u(x)$, y se recupera $\pi^*(\Gamma_{\nabla u}) = 1$ con $T = \nabla u$ definido en D y boreliano. El Lema 9.1.2 sigue siendo aplicable y los Pasos 3 a 6 no se modifican.

OBSERVACIÓN 9.1.6 (La hipótesis $\mu \ll \mathcal{L}^d$ es necesaria). Si μ tiene átomos, el plan óptimo puede no estar inducido por ningún mapa. El ejemplo más simple: sean $\mu = \delta_{x_0}$ y $\nu = \frac{1}{2}\delta_{y_0} + \frac{1}{2}\delta_{y_1}$ con $y_0 \neq y_1$. El único plan admisible —y por lo tanto el óptimo— es

$$\pi = \frac{1}{2}\delta_{(x_0, y_0)} + \frac{1}{2}\delta_{(x_0, y_1)},$$

que no está inducido por ningún mapa, pues el punto x_0 debe repartir su masa entre y_0 e y_1 .

Vale la pena conectar este ejemplo con la Observación 9.1.4. Como π está concentrado en el conjunto de saturación, la condición

$$u(x_0) + \bar{u}(y) = x_0 \cdot y$$

debe valer tanto para $y = y_0$ como para $y = y_1$. Es decir, $\{y_0, y_1\} \subset \partial u(x_0)$ y, por la Proposición D.4.1, el potencial u no es diferenciable en x_0 . Esto muestra que la hipótesis $u \in C^1$ del teorema no es una restricción inocua: excluye exactamente los casos patológicos.

OBSERVACIÓN 9.1.7 (Medidas de soporte no compacto). El teorema de Brenier vale, más generalmente, para $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ con $\mu \ll \mathcal{L}^d$, sin hipótesis de compacidad sobre los soportes. Sin embargo, la demostración del teorema de existencia de potenciales de Kantorovich que dimos en el Capítulo 6 usa de manera esencial la compacidad de X e Y (vía Ascoli–Arzelà), de modo que el caso general requiere una extensión de ese resultado. Dicha extensión es estándar pero técnica: se demuestra que, para el costo cuadrático y medidas en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, los potenciales c -cóncavos son localmente Lipschitz y admiten cotas de crecimiento cuadrático que permiten reemplazar el argumento de compacidad. Puede consultarse, por ejemplo, en [21] o [19]. Una vez disponible la existencia de potenciales, los Pasos 2 a 6 de la demostración anterior se aplican sin cambios.

El siguiente corolario es el recíproco del teorema: nos dice que para verificar que un mapa es óptimo basta comprobar que es el gradiente de una función convexa y que transporta μ en ν . Lo usaremos repetidamente en las secciones siguientes.

COROLARIO 9.1.8 (Criterio de optimalidad de Brenier). Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y de clase C^1 . Si $T = \nabla u$ verifica $T_{\#}\mu = \nu$, entonces T es el mapa de transporte óptimo entre μ y ν para el costo cuadrático, y $\pi = (\text{id}, T)_{\#}\mu$ es un plan óptimo.

DEMOSTRACIÓN. Definimos

$$\varphi(x) = |x|^2 - 2u(x), \quad \psi(y) = |y|^2 - 2\bar{u}(y).$$

La desigualdad de Fenchel–Young,

$$x \cdot y \leq u(x) + \bar{u}(y) \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^d,$$

que es consecuencia inmediata de la definición de la transformada de Legendre, equivale a

$$\varphi(x) + \psi(y) \leq |x - y|^2 \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^d,$$

de modo que el par (φ, ψ) es admisible para el problema dual.

Por otra parte, en la Sección 6.4 vimos que, para u convexa y C^1 , vale la identidad

$$\bar{u}(\nabla u(x)) = x \cdot \nabla u(x) - u(x),$$

es decir, $u(x) + \bar{u}(\nabla u(x)) = x \cdot \nabla u(x)$ para todo x . Esto dice que la saturación $\varphi(x) + \psi(y) = |x - y|^2$ se verifica en todo punto del gráfico de $T = \nabla u$, y en particular π -c.t.p., pues π está concentrado en dicho gráfico.

Por el criterio de optimalidad (Proposición 6.3.3), π es un plan óptimo y (φ, ψ) es un par dual óptimo. Como $\pi = (\text{id}, T)_{\#}\mu$, el mapa T resuelve el problema de Monge. $\square$

OBSERVACIÓN 9.1.9. Obsérvese que el Corolario 9.1.8 no requiere $\mu \ll \mathcal{L}^d$ ni compacidad de los soportes: sólo usa el criterio de optimalidad, que es válido en total generalidad. La continuidad absoluta es necesaria para la *existencia* del mapa, no para verificar la optimalidad de un mapa dado.

9.2. El caso gaussiano

El teorema de Brenier garantiza la existencia del mapa óptimo, pero no da una fórmula para calcularlo. Hay, sin embargo, una familia de ejemplos en la que el mapa puede determinarse explícitamente: el de las medidas gaussianas. Aquí el Corolario 9.1.8 hace todo el trabajo: proponemos un candidato y verificamos las dos condiciones del criterio.

EJEMPLO 9.2.1 (Gaussianas isotrópicas). Sean $\mu = \mathcal{N}(0, \sigma_0^2 I)$ y $\nu = \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 I)$, con $\sigma_0, \sigma_1 > 0$. Afirmamos que el mapa óptimo es la homotecia

$$T(x) = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} x.$$

En efecto, consideremos la función

$$u(x) = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \frac{|x|^2}{2},$$

que es convexa (es un múltiplo positivo de $|x|^2/2$) y de clase C^∞ , y verifica $\nabla u = T$. Por el Corolario 9.1.8, basta comprobar que $T_\# \mu = \nu$.

Esto es inmediato: si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_0^2 I)$, entonces $T(X) = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} X$ es gaussiana centrada con matriz de covarianza

$$\left(\frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2 \sigma_0^2 I = \sigma_1^2 I,$$

es decir, $T(X) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 I) = \nu$.

Por lo tanto T es el mapa óptimo. El costo óptimo resulta

$$\int_{\mathbb{R}^d} |x - T(x)|^2 d\mu(x) = \left(1 - \frac{\sigma_1}{\sigma_0}\right)^2 \int_{\mathbb{R}^d} |x|^2 d\mu(x) = d(\sigma_0 - \sigma_1)^2,$$

donde usamos que $\int |x|^2 d\mu = d\sigma_0^2$.

OBSERVACIÓN 9.2.2 (Gaussianas generales). Para gaussianas centradas arbitrarias $\mu = \mathcal{N}(0, \Sigma_0)$ y $\nu = \mathcal{N}(0, \Sigma_1)$, con Σ_0, Σ_1 matrices de covarianza definidas positivas, el mismo razonamiento funciona y el mapa óptimo es la transformación lineal $T(x) = Ax$, donde

$$A = \Sigma_0^{-1/2} (\Sigma_0^{1/2} \Sigma_1 \Sigma_0^{1/2})^{1/2} \Sigma_0^{-1/2}.$$

Aquí $\Sigma^{1/2}$ denota la única raíz cuadrada simétrica definida positiva de una matriz simétrica definida positiva Σ (véase el Lema C.1.1). Verifiquemos las dos hipótesis del Corolario 9.1.8.

T es el gradiente de una función convexa. Escribamos $M = \Sigma_0^{1/2} \Sigma_1 \Sigma_0^{1/2}$, que es simétrica y definida positiva: es simétrica por ser de la forma $B C B$ con B y C simétricas, y para $x \neq 0$ se tiene $x^T M x = (\Sigma_0^{1/2} x)^T \Sigma_1 (\Sigma_0^{1/2} x) > 0$, pues $\Sigma_0^{1/2} x \neq 0$. Por lo tanto $M^{1/2}$ está bien definida, y el mismo argumento aplicado a $A = \Sigma_0^{-1/2} M^{1/2} \Sigma_0^{-1/2}$

muestra que A es simétrica y definida positiva. En consecuencia, $u(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle$ es convexa y, por la simetría de A , $\nabla u(x) = Ax = T(x)$.

$T_{\#}\mu = \nu$. Si $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_0)$, entonces AX es gaussiana centrada con matriz de covarianza $A\Sigma_0A^T = A\Sigma_0A$. Ahora bien, usando $\Sigma_0^{-1/2}\Sigma_0\Sigma_0^{-1/2} = I$ y $M^{1/2}M^{1/2} = M$,

$$\begin{aligned} A\Sigma_0A &= \Sigma_0^{-1/2}M^{1/2}(\Sigma_0^{-1/2}\Sigma_0\Sigma_0^{-1/2})M^{1/2}\Sigma_0^{-1/2} = \Sigma_0^{-1/2}M\Sigma_0^{-1/2} \\ &= \Sigma_0^{-1/2}\Sigma_0^{1/2}\Sigma_1\Sigma_0^{1/2}\Sigma_0^{-1/2} = \Sigma_1. \end{aligned}$$

Luego $AX \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_1) = \nu$, y el Corolario 9.1.8 concluye que T es óptimo.

En el caso isótropo $\Sigma_i = \sigma_i^2 I$ se recupera $A = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} I$, es decir, el Ejemplo 9.2.1. Obsérvese además que si Σ_0 y Σ_1 conmutan la fórmula se simplifica a $A = \Sigma_0^{-1/2}\Sigma_1^{1/2}$, pero en general el orden de los factores importa: la expresión de A es la única «media geométrica» de Σ_0^{-1} y Σ_1 que resulta simétrica. Esta fórmula tiene aplicaciones directas en estadística y aprendizaje automático, donde el transporte entre gaussianas aparece como componente básica de modelos más complejos.

9.3. La interpolación de McCann

Una consecuencia notable del teorema de Brenier es que permite construir una interpolación canónica entre μ y ν , debida a McCann [15]. La idea es simple: en lugar de interpolar entre las *medidas*, interpolamos entre los *puntos*, desplazando cada partícula a lo largo del segmento que une x con $T(x)$.

DEFINICIÓN 9.3.1 (Interpolación de McCann). Sean μ, ν en las hipótesis del Teorema 9.1.3 y sea $T = \nabla u$ el mapa óptimo de Brenier entre ellas. Para $t \in [0, 1]$ definimos el *mapa de interpolación*

$$T_t = (1 - t) \text{id} + tT, \quad \text{es decir,} \quad T_t(x) = (1 - t)x + tT(x),$$

y la *interpolación de McCann* entre μ y ν como la curva de medidas

$$\mu_t = (T_t)_{\#}\mu, \quad t \in [0, 1].$$

Observemos que $T_0 = \text{id}$ y $T_1 = T$, de modo que $\mu_0 = \mu$ y $\mu_1 = \nu$: la curva $t \mapsto \mu_t$ une efectivamente μ con ν .

PROPOSICIÓN 9.3.2. Con las notaciones de la Definición 9.3.1, para cada $t \in [0, 1]$ el mapa T_t es el gradiente de la función convexa

$$u_t(x) = (1 - t)\frac{|x|^2}{2} + t u(x),$$

y es el mapa de transporte óptimo entre μ y μ_t .

DEMOSTRACIÓN. La función u_t es convexa por ser combinación convexa de las funciones convexas $|x|^2/2$ y u , ambas con coeficientes no negativos. Derivando,

$$\nabla u_t(x) = (1 - t)x + t\nabla u(x) = (1 - t)x + tT(x) = T_t(x).$$

Además $\mu_t = (T_t)_{\#}\mu$ por definición. Por el Corolario 9.1.8, T_t es el mapa óptimo entre μ y μ_t . $\square$

OBSERVACIÓN 9.3.3. La interpolación de McCann tiene una interpretación geométrica muy precisa: es la *geodésica* entre μ y ν en el espacio de medidas de probabilidad dotado de la distancia de Wasserstein W_2 , que estudiaremos en el Capítulo 10. Más concretamente, se verifica que

$$W_2(\mu_s, \mu_t) = |t - s| W_2(\mu, \nu) \quad \text{para todo } s, t \in [0, 1],$$

es decir, la curva $t \mapsto \mu_t$ recorre la distancia entre μ y ν a velocidad constante. Esto justifica el nombre de «interpolación» y convierte a $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), W_2)$ en un espacio geodésico.

EJEMPLO 9.3.4 (Interpolación entre gaussianas). Retomando el Ejemplo 9.2.1, con $\mu = \mathcal{N}(0, \sigma_0^2 I)$, $\nu = \mathcal{N}(0, \sigma_1^2 I)$ y $T(x) = \frac{\sigma_1}{\sigma_0} x$, el mapa de interpolación es

$$T_t(x) = \left((1-t) + t \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right) x = \frac{(1-t)\sigma_0 + t\sigma_1}{\sigma_0} x,$$

y por lo tanto

$$\mu_t = \mathcal{N}\left(0, \left((1-t)\sigma_0 + t\sigma_1\right)^2 I\right).$$

Es decir, la interpolación de McCann entre dos gaussianas isótropas es la curva de gaussianas cuya desviación estándar varía *linealmente* entre σ_0 y σ_1 .

Conviene contrastar esto con la interpolación lineal entre las medidas,

$$\tilde{\mu}_t = (1-t)\mu + t\nu,$$

que en general *no* es gaussiana: para $0 < t < 1$ es una mezcla de dos gaussianas, con densidad bimodal si σ_0 y σ_1 son suficientemente distintos. La interpolación de McCann respeta la estructura geométrica del problema; la lineal, no.

9.4. El teorema de Gangbo–McCann

El teorema de Brenier se apoya de manera esencial en la estructura del costo cuadrático: es ella la que hace aparecer la transformada de Legendre y las funciones convexas. Cabe preguntarse qué queda para otros costos.

La respuesta la da el teorema de Gangbo y McCann [12], que trata costos de la forma $c(x, y) = h(x - y)$ con h estrictamente convexa. Enunciamos el caso modelo.

TEOREMA 9.4.1 (Gangbo–McCann, 1996). *Sea $c(x, y) = |x - y|^p$ con $p > 1$, y sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ con $\mu \ll \mathcal{L}^d$. Entonces existe un único plan óptimo π^* , y está inducido por un mapa de transporte T , es decir, $\pi^* = (\text{id}, T)_\# \mu$.*

El mapa T ya no es, en general, el gradiente de una función convexa: esa propiedad es específica del costo cuadrático. Admite en cambio una caracterización en términos de la c -concavidad. Escribamos $c(x, y) = h(x - y)$ con $h(z) = |z|^p$, y denotemos por $\bar{h}$ la transformada de Legendre de h . Si φ es un potencial de Kantorovich óptimo, entonces

$$T(x) = x - \nabla \bar{h}(\nabla \varphi(x)) \quad \mu\text{-c.t.p.}$$

En efecto, la condición de saturación $\varphi(x) + \varphi^c(y) = h(x - y)$ en $y = T(x)$, junto con la desigualdad $\varphi(z) \leq h(z - T(x)) - \varphi^c(T(x))$ válida para todo z , dice que $z \mapsto h(z - T(x)) - \varphi(z)$ alcanza su mínimo en $z = x$; en los puntos de diferenciabilidad de φ esto fuerza $\nabla \varphi(x) = \nabla h(x - T(x))$, y como h es estrictamente convexa, $\nabla \bar{h} = (\nabla h)^{-1}$.

Para $p = 2$ se tiene $\bar{h}(w) = |w|^2/4$ y se recupera $T(x) = x - \frac{1}{2}\nabla\varphi(x) = \nabla u(x)$ con $u = \frac{1}{2}(|x|^2 - \varphi)$, en consonancia con el teorema de Brenier.

Vale la pena aislar cuál es la propiedad estructural que hace funcionar el argumento. En la demostración de Brenier, el paso decisivo fue que la condición de saturación determinaba *unívocamente* el punto y a partir de x . En el caso general, ese paso se apoya en la llamada *condición de twist*: que para cada x fijo, la aplicación

$$y \mapsto \nabla_x c(x, y)$$

sea inyectiva. Para $c(x, y) = |x - y|^p$ con $p > 1$ se tiene

$$\nabla_x c(x, y) = p|x - y|^{p-2}(x - y),$$

que efectivamente es inyectiva en y para cada x fijo: conocer $\nabla_x c(x, y)$ permite recuperar la dirección y el módulo de $x - y$, y por lo tanto el punto y . Esta inyectividad es la que reemplaza al rol de la biyección $x \mapsto \nabla u(x)$ en el caso cuadrático.

Para $p = 1$ la condición de twist falla: $\nabla_x c(x, y) = \frac{x-y}{|x-y|}$ depende sólo de la *dirección* de $x - y$, no de su módulo, y por lo tanto no es inyectiva. Esto no es un defecto del método: el problema de Monge con costo $|x - y|$ es genuinamente más difícil, el plan óptimo no es único en general, y su resolución —debida a Evans–Gangbo y a Trudinger–Wang, entre otros— requiere técnicas completamente distintas.

Ejercicios

EJERCICIO 9.1 (Traslaciones, dilataciones y gradientes). Sea $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

- Probar que la traslación $T(x) = x + v$ es el mapa óptimo entre μ y $T_{\#}\mu$, y que la dilatación $T(x) = \lambda x$ lo es si y sólo si $\lambda > 0$ o μ es una masa de Dirac. Más generalmente, $T(x) = Ax + b$ con A simétrica definida positiva es óptimo entre μ y $T_{\#}\mu$.
- Probar que la reflexión $R(x) = -x$ es óptima entre μ y $R_{\#}\mu$ si y sólo si μ es una masa de Dirac. *Sugerencia*: el soporte de un plan óptimo para el costo cuadrático es c -cíclicamente monótono; escribir la condición para dos puntos $(x, -x)$, $(x', -x')$.
- Si u es convexa y C^1 con $\nabla u_{\#}\mu = \nu$, probar que $\nabla \bar{u}$ es el mapa óptimo de ν a μ cuando $\bar{u} \in C^1$, y que $\nabla \bar{u} \circ \nabla u = \text{id}$ μ -c.t.p. (Apéndice D).

EJERCICIO 9.2 (El problema de maximización). Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ con soporte compacto y $\mu \ll \mathcal{L}^d$. Probar que el problema

$$\max \left\{ \int |x - T(x)|^2 d\mu : T_{\#}\mu = \nu \right\}$$

admite solución, que es única y que toda solución es el gradiente de una función *cóncava*. *Sugerencia*: maximizar $\int |x - y|^2 d\pi$ equivale a minimizar $\int x \cdot y d\pi$, o bien a minimizar el costo cuadrático entre μ y $R_{\#}\nu$ con $R(y) = -y$.

EJERCICIO 9.3 (Un mapa radial). Sean $\mu = \frac{1}{\pi} \mathbf{1}_{B(0,1)} \mathcal{L}^2$ y $\nu = \frac{1}{8\pi} (4 - |y|^2) \mathbf{1}_{B(0,2)} \mathcal{L}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

- (a) Buscar el mapa óptimo para el costo cuadrático en la forma radial $T(x) = \phi(|x|) \frac{x}{|x|}$: imponer $\mu(B(0, r)) = \nu(B(0, \phi(r)))$ y resolver para ϕ (se obtiene $\phi(r) = 2\sqrt{1 - \sqrt{1 - r^2}}$).
- (b) Probar que $T = \nabla u$ con $u(x) = \int_0^{|x|} \phi(s) ds$ convexa, y concluir con el Corolario 9.1.8 que T es óptimo.
- (c) Generalizar: si μ y ν son radiales en $\mathbb{R}^d$ y $\mu \ll \mathcal{L}^d$, el mapa óptimo es radial y está dado por el transporte monótono entre las leyes de $|x|$ bajo μ y ν (Capítulo 8).

EJERCICIO 9.4 (Imágenes afines de una medida invariante por rotaciones). Sea $\rho \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ con $R_\# \rho = \rho$ para toda matriz ortogonal R (por ejemplo, una gaussiana isótropa o la uniforme en una bola). Sean A, B simétricas definidas positivas, $a, b \in \mathbb{R}^d$, $L_A(x) = Ax + a$, $L_B(x) = Bx + b$, y $\mu = (L_A)_\# \rho$, $\nu = (L_B)_\# \rho$.

- (a) Probar que $L_B \circ L_A^{-1}$ transporta μ en ν pero en general *no* es óptimo (¿cuándo lo es?).
- (b) Hallar el mapa óptimo. *Sugerencia*: buscar $T(x) = b + M(x - a)$ con M simétrica definida positiva tal que $(MA)_\# \rho = B_\# \rho$; usar la invariancia de ρ y la factorización polar (Apéndice C) para reducirlo a $MAQ = B$ con Q ortogonal, y resolver $M = A^{-1}(AB^2A)^{1/2}A^{-1}$.
- (c) Comparar con la Observación 9.2.2 ($\Sigma_0 = A^2$, $\Sigma_1 = B^2$).

EJERCICIO 9.5 (Una reflexión que no es óptima). Sea $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y sea S la reflexión $S(x_1, \dots, x_d) = (x_1, \dots, x_{d-1}, -x_d)$.

- (a) Probar que si S es óptimo entre μ y $S_\# \mu$ para el costo cuadrático, entonces μ está concentrada en el gráfico $\{x_d = f(x_1, \dots, x_{d-1})\}$ de una función 1-Lipschitz f . *Sugerencia*: la c -monotonía cíclica de dos puntos del soporte da $|x_d - x'_d| \leq |\hat{x} - \hat{x}'|$ con $\hat{x} = (x_1, \dots, x_{d-1})$.
- (b) Deducir que S no puede ser óptimo si $\mu \ll \mathcal{L}^d$ (un gráfico Lipschitz tiene medida de Lebesgue nula).
- (c) Dar un ejemplo de μ , no Dirac, para el cual S sí es óptimo.

EJERCICIO 9.6 (Knott-Smith y un ejemplo de no unicidad). (a) (Criterio de Knott-Smith.) Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ y $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexa, con $\bar{u}$ finita sobre $\text{sop } \nu$ y tal que

$$u(x) + \bar{u}(y) = x \cdot y \quad \text{para } \pi\text{-casi todo } (x, y).$$

Probar que π es óptimo para el costo cuadrático. (Es la versión “con planes” del Corolario 9.1.8; la desigualdad de Fenchel-Young da la admisibilidad.)

- (b) Sean $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{(-1,-1)} + \delta_{(1,1)})$ y $\nu = \frac{1}{2}(\delta_{(-1,1)} + \delta_{(1,-1)})$ en $\mathbb{R}^2$, y $u(x) = |x_1 - x_2|$. Calcular $\bar{u}$ (vale 0 en el segmento $\{t(1, -1) : |t| \leq 1\}$ y $+\infty$ fuera) y verificar que *los dos* planes extremales de $\Pi(\mu, \nu)$ saturan la igualdad de (a) (de hecho, $x \cdot y = 0$ para los cuatro pares posibles). Concluir que ambos son óptimos, que todo $\Pi(\mu, \nu)$ es óptimo, y que la hipótesis $\mu \ll \mathcal{L}^d$ del Teorema 9.1.3 no puede suprimirse.
- (c) Comparar con el ejemplo de no unicidad de baricentros de la Sección 12.3.

EJERCICIO 9.7 (La convexidad como condición de segundo orden). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un dominio suave, f una densidad suave y positiva en Ω , y $T = \nabla u$ un mapa suave con

$T_{\#}(f dx) = \nu$. Sea v un campo suave con $\nabla \cdot (fv) = 0$ en Ω y $v \cdot n = 0$ en $\partial\Omega$, Y_t su flujo y $T_t = T \circ Y_t$.

- (a) Probar que $(Y_t)_{\#}(f dx) = f dx$ para todo t (usar la ecuación de continuidad $\partial_t \rho_t + \nabla \cdot (\rho_t v) = 0$ para $\rho_t = (Y_t)_{\#}(f dx)$ y la unicidad de su solución), y por lo tanto $(T_t)_{\#}(f dx) = \nu$: los T_t son competidores admisibles en el problema de Monge.
- (b) Sea $j(t) = \int_{\Omega} |T_t(x) - x|^2 f(x) dx$. Usando (a) para escribir

$$j(t) = \text{cte} - 2 \int_{\Omega} \langle \nabla u(y), Y_{-t}(y) \rangle f(y) dy,$$

probar que $j'(0) = 0$ y que

$$j''(0) = -2 \int_{\Omega} \langle \nabla u, (Dv)v \rangle f dy = 2 \int_{\Omega} \langle D^2 u(y) v(y), v(y) \rangle f(y) dy,$$

donde la segunda igualdad sale de integrar $\nabla(\nabla u \cdot v) \cdot v f$ usando $\nabla \cdot (fv) = 0$.

- (c) Deducir que si u es convexa entonces $j''(0) \geq 0$ para todo campo admisible: la convexidad del potencial de Brenier es la condición de segundo orden del problema de Monge. (★) Recíprocamente, probar que si $D^2 u(x_0)$ tiene un autovalor negativo, existe un campo admisible v , concentrado cerca de x_0 , con $j''(0) < 0$.

EJERCICIO 9.8 (★ Costos cóncavos de la distancia). Sea $c(x, y) = \arctan |x - y|$ en $\mathbb{R}^d$ y sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ con soportes compactos y disjuntos, $\mu \ll \mathcal{L}^d$.

- (a) Probar que las c -transformadas son Lipschitz y describir su módulo de continuidad.
- (b) Probar que existe un único plan óptimo y que está inducido por un mapa T ; expresarlo en términos del gradiente de un potencial de Kantorovich φ , como en el Teorema 9.4.1.
- (c) ¿Dónde se usa que los soportes son disjuntos? Ver [19, Sec. 3.3.2].

Distancias de Wasserstein

A lo largo de las notas hemos usado el costo óptimo de transporte como un número asociado a un par de medidas. En este capítulo cambiamos el punto de vista: para los costos $c(x, y) = |x - y|^p$ el costo óptimo, elevado a la $1/p$, define una *distancia* entre medidas de probabilidad, y el espacio de medidas con momento de orden p finito se convierte en un espacio métrico completo y separable, con una geometría propia. Este espacio métrico es el objeto central de la teoría moderna del transporte óptimo y el marco de las aplicaciones que veremos en los capítulos siguientes.

El capítulo cobra varias promesas hechas antes. La fórmula $\int_0^1 |F_\nu^{[-1]} - F_\mu^{[-1]}|^p dt$ del Capítulo 8 y el transporte entre gaussianas del Capítulo 9 se convierten en cálculos explícitos de distancias; la interpolación de McCann de la Sección 9.3 resulta ser una geodésica; y la dualidad de Kantorovich (Teorema 4.1.3) toma, para $p = 1$, la forma particularmente útil de Kantorovich–Rubinstein.

Trabajaremos en $X = Y = \mathbb{R}^d$ con su distancia euclídea. Casi todo lo que sigue vale, con las mismas demostraciones, en un espacio polaco arbitrario con $c(x, y) = d(x, y)^p$; señalaremos los pocos lugares donde se usa la estructura de $\mathbb{R}^d$.

10.1. Definición y primeros ejemplos

Recordemos (Definición 9.1.1) que, para $p \geq 1$, $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ denota el conjunto de medidas de probabilidad en $\mathbb{R}^d$ con $\int |x|^p d\mu < \infty$. Por la desigualdad de Jensen, si $1 \leq q \leq p$ entonces $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{P}_q(\mathbb{R}^d)$, y toda medida con soporte compacto pertenece a $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ para todo p .

DEFINICIÓN 10.1.1 (Distancia de Wasserstein). Sean $p \geq 1$ y $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$. La *distancia de Wasserstein de orden p* entre μ y ν es

$$W_p(\mu, \nu) = \left(\min_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} |x - y|^p d\pi(x, y) \right)^{1/p}.$$

Dos comentarios sobre la definición. En primer lugar, el mínimo existe: el costo $c(x, y) = |x - y|^p$ es continuo y no negativo, de modo que se aplica el Teorema 2.3.9. En segundo lugar, $W_p(\mu, \nu) < \infty$ para $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$. En efecto, por convexidad de $t \mapsto t^p$,

$$(10.1.1) \quad |x - y|^p \leq 2^{p-1}(|x|^p + |y|^p),$$

de modo que para *cualquier* $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$,

$$\int |x - y|^p d\pi \leq 2^{p-1} \left(\int |x|^p d\mu + \int |y|^p d\nu \right) < \infty.$$

Fuera de $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ la definición sigue teniendo sentido pero puede dar $+\infty$; por eso nos restringimos a ese espacio.

Un plan $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ que realiza el mínimo se llama *plan óptimo* para W_p ; en general no es único (Capítulo 8, Observación tras la Proposición 8.4.3), aunque lo es, por ejemplo, para $p > 1$ en dimensión uno o bajo las hipótesis del teorema de Brenier para $p = 2$.

EJEMPLO 10.1.2 (Deltas de Dirac). Si $\mu = \delta_{x_0}$, el único plan admisible entre μ y cualquier ν es $\delta_{x_0} \otimes \nu$, de modo que

$$W_p(\delta_{x_0}, \nu) = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |x_0 - y|^p d\nu(y) \right)^{1/p}.$$

En particular $W_p(\delta_{x_0}, \delta_{y_0}) = |x_0 - y_0|$ para todo p : la aplicación $x \mapsto \delta_x$ es una isometría de $\mathbb{R}^d$ en $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d), W_p)$. Tomando $x_0 = 0$ obtenemos la identidad

$$(10.1.2) \quad W_p(\delta_0, \nu) = \left(\int |y|^p d\nu(y) \right)^{1/p},$$

que usaremos repetidamente: el momento de orden p es la distancia a δ_0 .

EJEMPLO 10.1.3 (Dimensión uno). Si $d = 1$ y μ, ν tienen soporte compacto, la Proposición 8.4.5 da

$$W_p(\mu, \nu)^p = \int_0^1 |F_\nu^{[-1]}(t) - F_\mu^{[-1]}(t)|^p dt,$$

y para $p = 1$, además, $W_1(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} |F_\mu(x) - F_\nu(x)| dx$. Es decir, en la recta W_p es la distancia $L^p(0, 1)$ entre las pseudoinversas de las funciones de distribución. La fórmula vale para $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R})$ arbitrarias [19, Proposition 2.17].

Para el caso gaussiano necesitamos primero observar cómo se comporta W_2 frente a traslaciones.

LEMA 10.1.4 (Descomposición media-centrado). Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ con medias $m_\mu = \int x d\mu$ y $m_\nu = \int y d\nu$, y sean $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ las medidas centradas, imágenes de μ y ν por $x \mapsto x - m_\mu$ e $y \mapsto y - m_\nu$ respectivamente. Entonces

$$W_2^2(\mu, \nu) = |m_\mu - m_\nu|^2 + W_2^2(\tilde{\mu}, \tilde{\nu}).$$

DEMOSTRACIÓN. Para todo $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$, escribiendo $x - y = (x - m_\mu) - (y - m_\nu) + (m_\mu - m_\nu)$ y desarrollando el cuadrado,

$$\int |x - y|^2 d\pi = \int |(x - m_\mu) - (y - m_\nu)|^2 d\pi + |m_\mu - m_\nu|^2 + 2(m_\mu - m_\nu) \cdot \int ((x - m_\mu) - (y - m_\nu)) d\pi,$$

y la última integral es nula porque las marginales de π son μ y ν . Además, la aplicación $\pi \mapsto (x - m_\mu, y - m_\nu)_\# \pi$ es una biyección entre $\Pi(\mu, \nu)$ y $\Pi(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$ que transforma la primera integral del miembro derecho en $\int |x - y|^2 d\tilde{\pi}$. Tomando mínimo en π se obtiene la identidad. $\square$

EJEMPLO 10.1.5 (Gaussianas). Sean $\mu = \mathcal{N}(m_0, \Sigma_0)$ y $\nu = \mathcal{N}(m_1, \Sigma_1)$ con Σ_0, Σ_1 definidas positivas. Entonces

$$(10.1.3) \quad W_2^2(\mu, \nu) = |m_0 - m_1|^2 + \text{tr} \left(\Sigma_0 + \Sigma_1 - 2(\Sigma_0^{1/2} \Sigma_1 \Sigma_0^{1/2})^{1/2} \right).$$

En efecto, por el Lema 10.1.4 basta tratar el caso centrado. En la Observación 9.2.2 vimos que el mapa óptimo es $T(x) = Ax$ con $A = \Sigma_0^{-1/2} M^{1/2} \Sigma_0^{-1/2}$, $M = \Sigma_0^{1/2} \Sigma_1 \Sigma_0^{1/2}$, y que A es simétrica con $A \Sigma_0 A = \Sigma_1$. Si $X \sim \mathcal{N}(0, \Sigma_0)$,

$$\begin{aligned} W_2^2(\mu, \nu) &= \mathbb{E}|X - AX|^2 = \mathbb{E}[X^T(I - A)^2 X] = \text{tr}((I - A)\Sigma_0(I - A)) \\ &= \text{tr} \Sigma_0 - 2 \text{tr}(A \Sigma_0) + \text{tr}(A \Sigma_0 A), \end{aligned}$$

y $\text{tr}(A \Sigma_0 A) = \text{tr} \Sigma_1$, mientras que por la ciclicidad de la traza

$$\text{tr}(A \Sigma_0) = \text{tr}(\Sigma_0^{-1/2} M^{1/2} \Sigma_0^{-1/2} \Sigma_0) = \text{tr}(M^{1/2} \Sigma_0^{-1/2} \Sigma_0 \Sigma_0^{-1/2}) = \text{tr}(M^{1/2}).$$

En el caso isótropo $\Sigma_i = \sigma_i^2 I$ la fórmula se reduce a $W_2^2 = |m_0 - m_1|^2 + d(\sigma_0 - \sigma_1)^2$, en acuerdo con el Ejemplo 9.2.1; y en dimensión uno, $W_2^2(\mathcal{N}(m_0, \sigma_0^2), \mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)) = (m_0 - m_1)^2 + (\sigma_0 - \sigma_1)^2$: la distancia W_2 entre gaussianas unidimensionales es la distancia euclídea entre los pares (m, σ) .

10.2. W_p es una distancia

TEOREMA 10.2.1. *Para todo $p \geq 1$, W_p es una distancia en $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$.*

DEMOSTRACIÓN. Ya vimos que W_p toma valores finitos y no negativos.

Simetría. La aplicación $(x, y) \mapsto (y, x)$ transforma biyectivamente $\Pi(\mu, \nu)$ en $\Pi(\nu, \mu)$ y preserva el costo $|x - y|^p$; por lo tanto $W_p(\mu, \nu) = W_p(\nu, \mu)$.

$W_p(\mu, \nu) = 0$ **si y sólo si** $\mu = \nu$. Si $\mu = \nu$, el plan $(\text{id}, \text{id})_{\#} \mu \in \Pi(\mu, \mu)$ tiene costo cero. Recíprocamente, si $W_p(\mu, \nu) = 0$ y π es un plan óptimo, entonces $\int |x - y|^p d\pi = 0$, luego $x = y$ para π -c.t.p. (x, y) : el plan está concentrado en el gráfico de la identidad. Por el Lema 9.1.2, $\pi = (\text{id}, \text{id})_{\#} \mu$, y su segunda marginal es $\nu = \text{id}_{\#} \mu = \mu$.

Desigualdad triangular. Sean $\mu_1, \mu_2, \mu_3 \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ y sean $\pi_{12} \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$ y $\pi_{23} \in \Pi(\mu_2, \mu_3)$ planes óptimos. Por el Lema de pegado A.3.1 existe $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$ con $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)_{\#} \gamma = \pi_{12}$ y $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)_{\#} \gamma = \pi_{23}$, y por el Corolario A.3.4, $\pi_{13} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3)_{\#} \gamma$ pertenece a $\Pi(\mu_1, \mu_3)$. Entonces, usando la desigualdad triangular en $\mathbb{R}^d$ y la desigualdad de Minkowski en $L^p(\gamma)$,

$$\begin{aligned} W_p(\mu_1, \mu_3) &\leq \left(\int |x_1 - x_3|^p d\pi_{13} \right)^{1/p} = \left(\int |x_1 - x_3|^p d\gamma \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int (|x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|)^p d\gamma \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int |x_1 - x_2|^p d\gamma \right)^{1/p} + \left(\int |x_2 - x_3|^p d\gamma \right)^{1/p} \\ &= \left(\int |x_1 - x_2|^p d\pi_{12} \right)^{1/p} + \left(\int |x_2 - x_3|^p d\pi_{23} \right)^{1/p} \\ &= W_p(\mu_1, \mu_2) + W_p(\mu_2, \mu_3), \end{aligned}$$

donde en la penúltima igualdad usamos que $|x_1 - x_2|^p$ depende sólo de (x_1, x_2) y que $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)_{\#} \gamma = \pi_{12}$, y análogamente para el otro término. $\square$

OBSERVACIÓN 10.2.2. La demostración de la desigualdad triangular es el único lugar del capítulo donde interviene el lema de pegado, y por lo tanto el teorema de desintegración. Nótese que la construcción de γ es exactamente lo que en el Capítulo 8 hicimos «a mano» al componer los mapas monótonos: si π_{12} y π_{23} están inducidos por mapas T_{12} y T_{23} , entonces $\gamma = (\text{id}, T_{12}, T_{23} \circ T_{12})_{\#} \mu_1$ y $\pi_{13} = (\text{id}, T_{23} \circ T_{12})_{\#} \mu_1$ (Observación A.3.3).

PROPOSICIÓN 10.2.3 (Comparación entre las W_p). Sean $1 \leq q \leq p$ y $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$. Entonces

$$W_q(\mu, \nu) \leq W_p(\mu, \nu).$$

Si además μ y ν están concentradas en un conjunto de diámetro $D < \infty$, vale la desigualdad recíproca

$$W_p(\mu, \nu)^p \leq D^{p-q} W_q(\mu, \nu)^q.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea π un plan óptimo para W_p . Por la desigualdad de Jensen (o de Hölder) aplicada a la medida de probabilidad π ,

$$W_q(\mu, \nu)^q \leq \int |x - y|^q d\pi \leq \left(\int |x - y|^p d\pi \right)^{q/p} = W_p(\mu, \nu)^q.$$

Para la segunda afirmación, todo plan $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ está concentrado en $K \times K$, donde K es el conjunto de diámetro D , de modo que $|x - y| \leq D$ π -c.t.p. y $|x - y|^p \leq D^{p-q} |x - y|^q$. Tomando π óptimo para W_q e integrando se obtiene la desigualdad. $\square$

Así, para medidas con soporte en un compacto fijo, todas las distancias W_p son equivalentes en el sentido de que definen la misma noción de convergencia. En $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ en general no es así: las distancias de orden alto penalizan más el transporte de masa a grandes distancias.

Cerramos la sección con una cota que dice que W_p es *localmente acotada*: la distancia entre dos medidas está controlada por sus momentos.

PROPOSICIÓN 10.2.4. Para $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$,

$$W_p(\mu, \nu) \leq \left(\int |x|^p d\mu \right)^{1/p} + \left(\int |y|^p d\nu \right)^{1/p}.$$

DEMOSTRACIÓN. Es la desigualdad triangular $W_p(\mu, \nu) \leq W_p(\mu, \delta_0) + W_p(\delta_0, \nu)$ junto con (10.1.2). $\square$

10.3. Convergencia en W_p

Queremos entender qué significa que $W_p(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$. La respuesta completa es la siguiente.

TEOREMA 10.3.1 (Caracterización de la convergencia en W_p). Sean $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$. Entonces $W_p(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$ si y sólo si

$$\mu_n \rightharpoonup \mu \quad y \quad \int |x|^p d\mu_n \longrightarrow \int |x|^p d\mu.$$

Demostremos completamente la implicación directa, que es la que se usa en el resto de las notas, y la recíproca en el caso en que todas las medidas están concentradas en un compacto fijo, donde la condición sobre los momentos es automática. La recíproca en general requiere un argumento adicional de truncamiento; puede consultarse en [21, Theorem 6.9] o [19, Theorem 5.11].

Necesitaremos una parte del llamado *teorema de Portmanteau*, que caracteriza la convergencia débil de varias maneras equivalentes. Enunciamos y demostramos sólo lo que vamos a usar; el enunciado completo está en [5, Theorem 2.1].

LEMA 10.3.2 (Portmanteau, parcial). Sean $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

1. Si $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$ para toda $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz y acotada, entonces $\mu_n \rightarrow \mu$.
2. Si $\mu_n \rightarrow \mu$, entonces para todo abierto G , todo cerrado F y todo boreliano C con $\mu(\partial C) = 0$,

$$\liminf_n \mu_n(G) \geq \mu(G), \quad \limsup_n \mu_n(F) \leq \mu(F), \quad \lim_n \mu_n(C) = \mu(C).$$

DEMOSTRACIÓN. **Paso 1: de Lipschitz acotadas a abiertos.** Supongamos que las integrales convergen para toda f Lipschitz acotada y sea G abierto. Las funciones $f_k(x) = \min\{1, k d(x, G^c)\}$ son Lipschitz, acotadas, y $f_k \uparrow \mathbf{1}_G$ (como en la demostración del Lema 2.3.7). Como $f_k \leq \mathbf{1}_G$,

$$\liminf_n \mu_n(G) \geq \liminf_n \int f_k d\mu_n = \int f_k d\mu \quad \text{para todo } k,$$

y haciendo $k \rightarrow \infty$, por convergencia monótona, $\liminf_n \mu_n(G) \geq \mu(G)$.

Paso 2: de abiertos a C_b . Supongamos que $\liminf_n \mu_n(G) \geq \mu(G)$ para todo abierto G , y sea $f \in C_b(\mathbb{R}^d)$. Reemplazando f por $f + \|f\|_\infty$ podemos suponer $0 \leq f \leq M$. Por la fórmula de la «torta en capas» y el lema de Fatou,

$$\begin{aligned} \liminf_n \int f d\mu_n &= \liminf_n \int_0^M \mu_n(\{f > t\}) dt \\ &\geq \int_0^M \liminf_n \mu_n(\{f > t\}) dt \\ &\geq \int_0^M \mu(\{f > t\}) dt = \int f d\mu, \end{aligned}$$

donde usamos que $\{f > t\}$ es abierto por la continuidad de f . Aplicando lo mismo a $M - f$, que también es continua con valores en $[0, M]$, obtenemos $\limsup_n \int f d\mu_n \leq \int f d\mu$. Luego $\int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu$, es decir, $\mu_n \rightarrow \mu$. Junto con el Paso 1, esto prueba el ítem 1.

Paso 3: el ítem 2. Si $\mu_n \rightarrow \mu$, en particular las integrales convergen para toda f Lipschitz acotada, y el Paso 1 da la desigualdad para abiertos. Para F cerrado, aplicamos lo anterior a $G = F^c$: $\limsup_n \mu_n(F) = 1 - \liminf_n \mu_n(F^c) \leq 1 - \mu(F^c) =$

$\mu(F)$. Finalmente, si $\mu(\partial C) = 0$ entonces $\mu(\text{int } C) = \mu(C) = \mu(\overline{C})$, y

$$\begin{aligned}\mu(C) &= \mu(\text{int } C) \leq \liminf_n \mu_n(\text{int } C) \\ &\leq \liminf_n \mu_n(C) \leq \limsup_n \mu_n(C) \\ &\leq \limsup_n \mu_n(\overline{C}) \leq \mu(\overline{C}) = \mu(C).\end{aligned}$$

□

DEMOSTRACIÓN DE LA IMPLICACIÓN DIRECTA. Supongamos $W_p(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$.

Convergencia débil. Sea f Lipschitz con constante L y acotada, y sea $\pi_n \in \Pi(\mu_n, \mu)$ óptimo para W_p . Entonces

$$\begin{aligned}\left| \int f d\mu_n - \int f d\mu \right| &= \left| \int (f(x) - f(y)) d\pi_n(x, y) \right| \leq L \int |x - y| d\pi_n \\ &\leq L \left(\int |x - y|^p d\pi_n \right)^{1/p} = L W_p(\mu_n, \mu) \rightarrow 0,\end{aligned}$$

donde la desigualdad del medio es Jensen. Por el ítem 1 del Lema 10.3.2, $\mu_n \rightarrow \mu$.

Convergencia de los momentos. Por (10.1.2) y la desigualdad triangular,

$$\left| \left(\int |x|^p d\mu_n \right)^{1/p} - \left(\int |x|^p d\mu \right)^{1/p} \right| = |W_p(\mu_n, \delta_0) - W_p(\mu, \delta_0)| \leq W_p(\mu_n, \mu) \rightarrow 0.$$

□

Para la recíproca en compactos necesitamos un lema elemental sobre medidas con soporte finito, que volverá a servirnos al probar la separabilidad.

LEMA 10.3.3 (Medidas con el mismo soporte finito). Sean $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{R}^d$ puntos contenidos en un conjunto de diámetro D , y sean $\alpha = \sum_i \alpha_i \delta_{z_i}$, $\beta = \sum_i \beta_i \delta_{z_i}$ medidas de probabilidad. Entonces

$$W_p(\alpha, \beta)^p \leq \frac{D^p}{2} \sum_{i=1}^N |\alpha_i - \beta_i|.$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $m_i = \min\{\alpha_i, \beta_i\}$ y $\theta = \sum_i (\alpha_i - m_i) = \sum_i (\beta_i - m_i) = \frac{1}{2} \sum_i |\alpha_i - \beta_i|$ (las dos sumas coinciden porque $\sum \alpha_i = \sum \beta_i = 1$). Si $\theta = 0$ entonces $\alpha = \beta$ y no hay nada que probar. Si $\theta > 0$, definimos el plan

$$\pi = \sum_i m_i \delta_{(z_i, z_i)} + \frac{1}{\theta} \sum_{i,j} (\alpha_i - m_i)(\beta_j - m_j) \delta_{(z_i, z_j)},$$

que deja en su lugar la masa común m_i y reparte el excedente de α proporcionalmente sobre el defecto de β . Sus marginales son α y β : la primera es $\sum_i (m_i + (\alpha_i - m_i)) \delta_{z_i} = \alpha$, y análogamente la segunda. El primer sumando no tiene costo, y el segundo transporta masa total θ a distancia a lo sumo D , de modo que $\int |x - y|^p d\pi \leq \theta D^p$. □

DEMOSTRACIÓN DE LA RECÍPROCA EN COMPACTOS. Supongamos que $\mu_n \rightarrow \mu$ y que existe $R > 0$ tal que todas las medidas μ_n y μ están concentradas en la bola cerrada $K = \overline{B(0, R)}$. Fijemos $\varepsilon > 0$.

Paso 1: una partición sin masa en los bordes. Para cada coordenada $k = 1, \dots, d$, el conjunto de valores $s \in \mathbb{R}$ tales que $\mu(\{x : x_k = s\}) > 0$ es a lo sumo numerable (los hiperplanos $\{x_k = s\}$ son disjuntos para distintos s y μ es finita). Podemos entonces elegir, en cada coordenada, una sucesión finita de valores $s_0^k < s_1^k < \dots < s_L^k$ con $s_0^k < -R$, $s_L^k > R$, $s_{l+1}^k - s_l^k < \varepsilon/\sqrt{d}$ y $\mu(\{x_k = s_l^k\}) = 0$ para todo l . Los productos de intervalos $C_i = \prod_k [s_{l_k}^k, s_{l_k+1}^k)$, $i = 1, \dots, N$, forman una partición finita de un conjunto que contiene a K en celdas de diámetro menor que ε , y ∂C_i está contenido en una unión finita de hiperplanos μ -nulos, de modo que $\mu(\partial C_i) = 0$.

Paso 2: discretización. Elijamos un punto $z_i \in C_i$ en cada celda, y sea Q la aplicación, definida en la unión de las celdas, que envía cada punto de C_i a z_i . Para toda medida σ concentrada en K , el plan $(\text{id}, Q)_\# \sigma \in \Pi(\sigma, Q_\# \sigma)$ mueve cada punto menos de ε , de modo que

$$W_p(\sigma, Q_\# \sigma) < \varepsilon.$$

Por la desigualdad triangular,

$$W_p(\mu_n, \mu) \leq W_p(\mu_n, Q_\# \mu_n) + W_p(Q_\# \mu_n, Q_\# \mu) + W_p(Q_\# \mu, \mu) < 2\varepsilon + W_p(Q_\# \mu_n, Q_\# \mu).$$

Paso 3: convergencia de las medidas discretizadas. Las medidas $Q_\# \mu_n = \sum_i \mu_n(C_i) \delta_{z_i}$ y $Q_\# \mu = \sum_i \mu(C_i) \delta_{z_i}$ tienen el mismo soporte finito, contenido en un conjunto de diámetro $D \leq 2R + 2\varepsilon$. Por el Lema 10.3.3,

$$W_p(Q_\# \mu_n, Q_\# \mu)^p \leq \frac{D^p}{2} \sum_{i=1}^N |\mu_n(C_i) - \mu(C_i)|,$$

y como $\mu(\partial C_i) = 0$, el ítem 2 del Lema 10.3.2 da $\mu_n(C_i) \rightarrow \mu(C_i)$ para cada i . Siendo la suma finita, $W_p(Q_\# \mu_n, Q_\# \mu) \rightarrow 0$.

Combinando, $\limsup_n W_p(\mu_n, \mu) \leq 2\varepsilon$, y como ε es arbitrario, $W_p(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$. $\square$

OBSERVACIÓN 10.3.4. La demostración anterior no usa nada específico de $\mathbb{R}^d$ salvo la existencia de particiones finitas en celdas pequeñas con bordes μ -nulos, que en un espacio métrico compacto arbitrario se reemplaza por un cubrimiento finito por bolas de radio $\varepsilon/2$ cuyos bordes sean μ -nulos (los radios «malos» son a lo sumo numerables). El punto esencial es que sobre un compacto la convergencia débil ya contiene toda la información métrica: no hay masa que pueda escaparse al infinito. En $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ general ese escape es posible —por ejemplo $\mu_n = (1 - \frac{1}{n})\delta_0 + \frac{1}{n}\delta_n$ converge débilmente a δ_0 pero $W_1(\mu_n, \delta_0) = 1$ — y la condición sobre los momentos es exactamente lo que lo impide.

10.4. Completitud y separabilidad

El espacio $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d), W_p)$ hereda de $\mathbb{R}^d$ las dos propiedades que hacen manejable un espacio métrico. Necesitamos un lema previo de semicontinuidad inferior, que dice que W_p sólo puede *bajar* en el límite débil.

LEMA 10.4.1 (Semicontinuidad inferior de W_p). Sean $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ y $(\nu_k) \subset \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ con $\nu_k \rightharpoonup \nu$ y $\sup_k \int |y|^p d\nu_k < \infty$. Entonces $\nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ y

$$W_p(\mu, \nu) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} W_p(\mu, \nu_k).$$

DEMOSTRACIÓN. Que $\nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ se sigue de la semicontinuidad inferior del funcional $\sigma \mapsto \int |y|^p d\sigma$ respecto de la convergencia débil, que es el Teorema 2.3.6 aplicado en un solo factor (o, directamente: $\int \min\{|y|^p, m\} d\nu = \lim_k \int \min\{|y|^p, m\} d\nu_k \leq \sup_k \int |y|^p d\nu_k$ para todo m , y se hace $m \rightarrow \infty$).

Pasando a una subsucesión, podemos suponer que $W_p(\mu, \nu_k)$ converge al $\liminf$. Sea $\pi_k \in \Pi(\mu, \nu_k)$ óptimo. La familia (π_k) es ajustada: dado $\varepsilon > 0$, elegimos R tal que $\mu(B(0, R)^c) < \varepsilon/2$ y, por la desigualdad de Markov,

$$\nu_k(B(0, R)^c) \leq \frac{1}{R^p} \sup_k \int |y|^p d\nu_k < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{para todo } k;$$

entonces $\pi_k(\overline{(B(0, R) \times B(0, R))^c}) < \varepsilon$ para todo k . Por el Teorema de Prokhorov 2.2.6, una subsucesión π_{k_j} converge débilmente a cierto π , y por el mismo argumento del Lema 2.3.8 —cuya demostración no usa que las marginales sean fijas, sino sólo que convergen débilmente, aquí a μ y a ν —, $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$. Finalmente, por la semicontinuidad inferior del funcional de Kantorovich (Teorema 2.3.6),

$$W_p(\mu, \nu)^p \leq \int |x - y|^p d\pi \leq \liminf_j \int |x - y|^p d\pi_{k_j} = \lim_k W_p(\mu, \nu_k)^p.$$

□

TEOREMA 10.4.2 (Completitud). *El espacio métrico $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d), W_p)$ es completo.*

DEMOSTRACIÓN. Sea (μ_n) una sucesión de Cauchy para W_p .

Paso 1: momentos acotados y ajuste. Como la sucesión es de Cauchy, es acotada: existe M tal que $W_p(\mu_n, \mu_1) \leq M$ para todo n , y por (10.1.2) y la desigualdad triangular,

$$\left(\int |x|^p d\mu_n \right)^{1/p} = W_p(\mu_n, \delta_0) \leq W_p(\mu_n, \mu_1) + W_p(\mu_1, \delta_0) \leq M',$$

con M' independiente de n . Por la desigualdad de Markov, $\mu_n(B(0, R)^c) \leq M'^p/R^p$ para todo n , de modo que (μ_n) es una familia ajustada.

Paso 2: límite débil de una subsucesión. Por el Teorema de Prokhorov 2.2.6 existe una subsucesión $\mu_{n_k} \rightharpoonup \mu$ para cierta $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$, y por el Lema 10.4.1, $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$.

Paso 3: la sucesión completa converge a μ en W_p . Fijado n , aplicamos el Lema 10.4.1 con $\nu_k = \mu_{n_k}$:

$$W_p(\mu_n, \mu) \leq \liminf_k W_p(\mu_n, \mu_{n_k}) \leq \sup_{m \geq n} W_p(\mu_n, \mu_m),$$

y el miembro derecho tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$ porque la sucesión es de Cauchy. □

TEOREMA 10.4.3 (Separabilidad). *El espacio métrico $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d), W_p)$ es separable. Más precisamente, el conjunto de medidas de la forma $\sum_{i=1}^N q_i \delta_{z_i}$ con $N \in \mathbb{N}$, $z_i \in \mathbb{Q}^d$ y $q_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$, $\sum q_i = 1$, es denso.*

DEMOSTRACIÓN. Ese conjunto es numerable. Sean $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ y $\varepsilon > 0$; construimos una medida del conjunto a distancia menor que 3ε de μ , en tres pasos.

Paso 1: truncar. Para $R > 0$, sea $\mu_R = \mu|_{\overline{B(0,R)}} + \mu(B(0,R)^c) \delta_0$, la medida que deja fija la masa de la bola y concentra en el origen la masa exterior. El plan que actúa como la identidad en la bola y envía el exterior a 0 es admisible entre μ y μ_R , y su costo es $\int_{B(0,R)^c} |x|^p d\mu$, que tiende a cero cuando $R \rightarrow \infty$ porque $\mu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$. Fijamos R con $W_p(\mu, \mu_R) < \varepsilon$.

Paso 2: discretizar. Como en la demostración de la recíproca del Teorema 10.3.1, partimos $\overline{B(0,R)}$ en finitas celdas $C_1, \dots, C_N$ de diámetro menor que ε , y elegimos en cada celda un punto $z_i \in C_i \cap \mathbb{Q}^d$ (posible porque las celdas tienen interior no vacío). La medida $\alpha = Q_{\#}\mu_R = \sum_i \mu_R(C_i) \delta_{z_i}$ verifica $W_p(\mu_R, \alpha) < \varepsilon$.

Paso 3: racionalizar los pesos. Elegimos $q_i \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ con $\sum_i q_i = 1$ y $\sum_i |\mu_R(C_i) - q_i| < 2\varepsilon^p/D^p$, donde D es el diámetro de $\{z_1, \dots, z_N\}$ (esto es posible: se aproximan $N-1$ de los pesos por racionales y se ajusta el último para que la suma dé uno). Por el Lema 10.3.3, la medida $\beta = \sum_i q_i \delta_{z_i}$ satisface $W_p(\alpha, \beta) < \varepsilon$.

Por la desigualdad triangular, $W_p(\mu, \beta) < 3\varepsilon$. □

OBSERVACIÓN 10.4.4. Los dos teoremas anteriores dicen que $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d), W_p)$ es un espacio polaco. Esto no es una curiosidad: significa que toda la teoría de los Capítulos 6 y siguientes puede aplicarse tomando como espacio base al propio $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$, es decir, que se puede hacer transporte óptimo *entre medidas sobre medidas*. No exploraremos esa dirección, pero la usaremos implícitamente en el Capítulo 12 al minimizar funcionales sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ por el método directo.

10.5. Geodésicas

En un espacio métrico (E, ρ) , una curva $t \mapsto e_t$, $t \in [0, 1]$, es una *geodésica de velocidad constante* entre e_0 y e_1 si

$$\rho(e_s, e_t) = |t - s| \rho(e_0, e_1) \quad \text{para todo } s, t \in [0, 1].$$

En $\mathbb{R}^d$ las geodésicas son los segmentos $x_t = (1-t)x_0 + tx_1$. La construcción que sigue traslada esa idea a $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$: en lugar de interpolar linealmente las medidas —lo que daría la mezcla $(1-t)\mu + t\nu$, que *no* es una geodésica— interpolamos linealmente las *posiciones* de las partículas a lo largo de un plan óptimo.

DEFINICIÓN 10.5.1 (Interpolación por desplazamiento). Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ y sea $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ un plan óptimo para W_p . Para $t \in [0, 1]$ definimos

$$\mathbf{e}_t: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \mathbf{e}_t(x, y) = (1-t)x + ty, \quad \text{y} \quad \mu_t = (\mathbf{e}_t)_{\#}\pi.$$

Nótese que $\mathbf{e}_0 = \mathbf{p}_1$ y $\mathbf{e}_1 = \mathbf{p}_2$ son las dos proyecciones, de modo que $\mu_0 = \mu$ y $\mu_1 = \nu$.

TEOREMA 10.5.2 (Las interpolaciones por desplazamiento son geodésicas). *Con las notaciones de la Definición 10.5.1, $\mu_t \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ para todo t , y*

$$W_p(\mu_s, \mu_t) = |t - s| W_p(\mu, \nu) \quad \text{para todo } s, t \in [0, 1].$$

En particular, $(\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d), W_p)$ es un espacio geodésico: dos puntos cualesquiera están unidos por una geodésica de velocidad constante.

DEMOSTRACIÓN. Sean $0 \leq s \leq t \leq 1$. La medida $\pi_{st} = (\mathbf{e}_s, \mathbf{e}_t)_{\#} \pi$ pertenece a $\Pi(\mu_s, \mu_t)$, pues sus marginales son $(\mathbf{e}_s)_{\#} \pi = \mu_s$ y $(\mathbf{e}_t)_{\#} \pi = \mu_t$. Como $\mathbf{e}_t(x, y) - \mathbf{e}_s(x, y) = (t - s)(y - x)$,

$$\begin{aligned} W_p(\mu_s, \mu_t)^p &\leq \int |u - v|^p d\pi_{st}(u, v) = \int |\mathbf{e}_t(x, y) - \mathbf{e}_s(x, y)|^p d\pi(x, y) \\ &= (t - s)^p \int |x - y|^p d\pi = (t - s)^p W_p(\mu, \nu)^p. \end{aligned}$$

Con $s = 0$ esto muestra en particular que $\mu_t \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ (por la Proposición 10.2.4 leída al revés, o directamente por (10.1.1)), y que $W_p(\mu_s, \mu_t) \leq (t - s)W_p(\mu, \nu)$.

Para la desigualdad opuesta usamos la desigualdad triangular tres veces:

$$W_p(\mu, \nu) \leq W_p(\mu, \mu_s) + W_p(\mu_s, \mu_t) + W_p(\mu_t, \nu) \leq s W_p(\mu, \nu) + W_p(\mu_s, \mu_t) + (1 - t) W_p(\mu, \nu),$$

de donde $W_p(\mu_s, \mu_t) \geq (t - s) W_p(\mu, \nu)$. $\square$

OBSERVACIÓN 10.5.3 (Relación con la interpolación de McCann). Bajo las hipótesis del Teorema 9.1.3 — $p = 2$, soportes compactos, $\mu \ll \mathcal{L}^d$ — el plan óptimo es único y está inducido por el mapa de Brenier, $\pi = (\text{id}, T)_{\#} \mu$. Entonces

$$\mu_t = (\mathbf{e}_t)_{\#} (\text{id}, T)_{\#} \mu = ((1 - t) \text{id} + tT)_{\#} \mu,$$

que es exactamente la interpolación de McCann de la Definición 9.3.1. El Teorema 10.5.2 demuestra así la afirmación que dejamos pendiente en la Sección 9.3: la interpolación de McCann es una geodésica de $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), W_2)$. La ventaja de la construcción por planes es que no requiere ni la unicidad del plan óptimo ni que esté inducido por un mapa, y vale para todo $p \geq 1$.

OBSERVACIÓN 10.5.4. Dos comentarios más. Primero, cuando el plan óptimo no es único, distintos planes óptimos dan distintas geodésicas; y aun cuando el plan es único, pueden existir geodésicas que no provienen de esta construcción si $p = 1$. Para $p > 1$, en cambio, *toda* geodésica de velocidad constante en $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ es una interpolación por desplazamiento a lo largo de algún plan óptimo; véase [3, Theorem 7.2.2]. Segundo, la interpolación lineal $(1 - t)\mu + t\nu$ no es una geodésica salvo en casos triviales: para $\mu = \delta_x$, $\nu = \delta_y$ con $x \neq y$ se tiene $W_p((1 - t)\delta_x + t\delta_y, \delta_x) = t^{1/p}|x - y|$, que no es lineal en t si $p > 1$ (y para $p = 1$ la mezcla es geodésica, pero distinta del desplazamiento $\delta_{(1-t)x+ty}$: la geodésica no es única).

10.6. La dualidad de Kantorovich–Rubinstein

Para $p = 1$ el problema dual de Kantorovich adopta una forma especialmente simple, que es la manera en que W_1 aparece en la mayoría de sus aplicaciones en estadística y aprendizaje automático. La razón es que, para el costo $c(x, y) = |x - y|$, la c -transformada de una función es esencialmente la función cambiada de signo.

LEMA 10.6.1. Sea $c(x, y) = |x - y|$ en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

1. Si $\varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es 1-Lipschitz, entonces $\varphi^c = -\varphi$.
2. Si $\zeta: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es tal que ζ^c es finita en todo punto, entonces ζ^c es 1-Lipschitz. En particular, toda función c -cóncava finita es 1-Lipschitz.

DEMOSTRACIÓN. Para el ítem 1, por definición $\varphi^c(y) = \inf_x \{|x - y| - \varphi(x)\}$. Tomando $x = y$ obtenemos $\varphi^c(y) \leq -\varphi(y)$. Por otra parte, la condición de Lipschitz da $\varphi(x) \leq \varphi(y) + |x - y|$, es decir, $|x - y| - \varphi(x) \geq -\varphi(y)$ para todo x , y tomando ínfimo, $\varphi^c(y) \geq -\varphi(y)$.

Para el ítem 2, sean $x, x' \in \mathbb{R}^d$. Para todo y con $\zeta(y) > -\infty$, la desigualdad triangular da $|x - y| - \zeta(y) \leq |x' - y| - \zeta(y) + |x - x'|$; tomando ínfimo en y (los y con $\zeta(y) = -\infty$ no contribuyen al ínfimo), $\zeta^c(x) \leq \zeta^c(x') + |x - x'|$. Intercambiando x y x' , $|\zeta^c(x) - \zeta^c(x')| \leq |x - x'|$. Es el mismo argumento de la proposición sobre módulos de continuidad del Capítulo 6, con $\omega(r) = r$. $\square$

TEOREMA 10.6.2 (Kantorovich–Rubinstein). Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$. Entonces

$$W_1(\mu, \nu) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\mu - \int_{\mathbb{R}^d} \varphi d\nu : \varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ 1-Lipschitz} \right\}.$$

Observemos que las integrales tienen sentido: si φ es 1-Lipschitz, entonces $|\varphi(x)| \leq |\varphi(0)| + |x|$, de modo que $\varphi \in L^1(\mu) \cap L^1(\nu)$ para $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$.

DEMOSTRACIÓN. **Desigualdad $\geq$.** Sea φ 1-Lipschitz y $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ cualquiera. Como las marginales de π son μ y ν ,

$$\int \varphi d\mu - \int \varphi d\nu = \int (\varphi(x) - \varphi(y)) d\pi(x, y) \leq \int |x - y| d\pi(x, y).$$

Tomando mínimo en π en el miembro derecho, y luego supremo en φ en el izquierdo, obtenemos que el supremo del enunciado es menor o igual que $W_1(\mu, \nu)$.

Desigualdad $\leq$. Por el Teorema de dualidad de Kantorovich 4.1.3 aplicado al costo $c(x, y) = |x - y|$, que es continuo y no negativo,

$$W_1(\mu, \nu) = \sup_{(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c} \left\{ \int \varphi d\mu + \int \psi d\nu \right\}.$$

Basta entonces ver que el valor de cualquier par admisible está dominado por el de algún par de la forma $(\tilde{\varphi}, -\tilde{\varphi})$ con $\tilde{\varphi}$ 1-Lipschitz. Sea $(\varphi, \psi) \in \mathcal{A}_c$, es decir, $\varphi(x) + \psi(y) \leq |x - y|$ para todo x, y , con $\varphi \in L^1(\mu)$ y $\psi \in L^1(\nu)$ a valores reales.

Primero, φ^c es finita: fijado y_0 , la admisibilidad da $\varphi(x) \leq |x - y_0| - \psi(y_0)$ para todo x , luego para todo y ,

$$\varphi^c(y) = \inf_x \{|x - y| - \varphi(x)\} \geq \inf_x \{|x - y| - |x - y_0|\} + \psi(y_0) \geq -|y - y_0| + \psi(y_0) > -\infty,$$

y $\varphi^c(y) \leq |y_0 - y| - \varphi(y_0) < +\infty$. Por el ítem 2 del Lema 10.6.1 (con los roles de x e y intercambiados), φ^c es 1-Lipschitz, y por el mismo argumento $\tilde{\varphi} := \varphi^{cc}$ es finita y 1-Lipschitz. Por el ítem 1, $\tilde{\varphi}^c = -\tilde{\varphi}$.

Ahora aplicamos la Proposición 6.1.5: el par $(\tilde{\varphi}, \varphi^c)$ es admisible con $\tilde{\varphi} \geq \varphi$ y $\varphi^c \geq \psi$; y aplicando el ítem 1 de la misma proposición al par admisible $(\tilde{\varphi}, \varphi^c)$ obtenemos que $(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^c) = (\tilde{\varphi}, -\tilde{\varphi})$ es admisible con $-\tilde{\varphi} \geq \varphi^c \geq \psi$. Por lo tanto

$$\int \varphi d\mu + \int \psi d\nu \leq \int \tilde{\varphi} d\mu - \int \tilde{\varphi} d\nu,$$

con $\tilde{\varphi}$ 1-Lipschitz (e integrable, por la observación previa al teorema). Tomando supremo sobre los pares admisibles se concluye. $\square$

OBSERVACIÓN 10.6.3. La demostración muestra algo más: el supremo en el Teorema 10.6.2 puede restringirse a funciones 1-Lipschitz que son además c -cóncavas, y si se sabe que el problema dual tiene solución (por ejemplo, en soportes compactos, por el Teorema 6.2.2), entonces el supremo es un máximo, alcanzado por un potencial de Kantorovich 1-Lipschitz. La igualdad $\psi = -\varphi$ dice que para el costo $|x - y|$ el problema dual depende de *una sola* función: por eso W_1 es a la vez la distancia más simple de calcular por dualidad y la más usada como funcional de discrepancia.

OBSERVACIÓN 10.6.4 (Dimensión uno). Para $d = 1$ el Teorema 10.6.2 permite reobtener la fórmula del área, $W_1(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} |F_\mu - F_\nu| dx$, del Capítulo 8: si φ es 1-Lipschitz, integrando por partes (para medidas con soporte compacto) $\int \varphi d(\mu - \nu) = -\int \varphi'(x)(F_\mu(x) - F_\nu(x)) dx \leq \int |F_\mu - F_\nu| dx$, con igualdad para $\varphi' = -\text{sgn}(F_\mu - F_\nu)$. Dejamos los detalles como ejercicio (Ejercicio 10.5).

OBSERVACIÓN 10.6.5 (W_1 como distancia entre medidas con signo). El miembro derecho del Teorema 10.6.2 depende de μ y ν sólo a través de la diferencia $\mu - \nu$, y define una norma —la *norma de Kantorovich–Rubinstein*— en el espacio de medidas con signo de masa total nula y primer momento finito. Ésta es la forma en que W_1 interviene en aplicaciones donde interesa comparar una medida empírica con un modelo, o entrenar un modelo generativo para que su ley se acerque a la de los datos: en ambos casos el supremo sobre funciones 1-Lipschitz se aproxima restringiéndolo a una familia paramétrica de funciones (por ejemplo, redes neuronales con pesos acotados), y la distancia se estima sin calcular ningún plan de transporte. Volveremos sobre el cálculo efectivo de distancias de Wasserstein en el Capítulo 13.

Ejercicios

EJERCICIO 10.1 (Momentos). Decidir a qué espacios $\mathcal{P}_p(\mathbb{R})$ pertenecen las medidas δ_2 , $\frac{1}{4}\delta_{-2} + \frac{3}{4}\delta_2$, $\mathcal{L}^1|_{[0,1]}$, $e^{-x}\mathcal{L}^1|_{[0,\infty)}$, $\frac{1}{\pi(1+x^2)}\mathcal{L}^1$ y $\sum_{n \geq 1} \frac{6}{\pi^2 n^2} \delta_n$, y calcular $W_p(\mu, \delta_0)$ cuando sea finito. Probar que $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d) \subsetneq \mathcal{P}_q(\mathbb{R}^d)$ para $q < p$.

EJERCICIO 10.2 (Escala, traslaciones y medias). Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$, $p \geq 1$.

- (a) Probar que $W_p(D_{\lambda\#}\mu, D_{\lambda\#}\nu) = \lambda W_p(\mu, \nu)$ para la dilatación $D_\lambda(x) = \lambda x$, $\lambda > 0$, y que W_p es invariante por traslaciones simultáneas y por isometrías de $\mathbb{R}^d$.
- (b) Probar que $W_p(\mu, \nu) \geq |m_\mu - m_\nu|$, donde m denota la media. *Sugerencia:* Jensen.
- (c) Deducir que si $\nu = \tau_{v\#}\mu$ es una traslación de μ , entonces $W_p(\mu, \nu) = |v|$ para todo $p \geq 1$, y la traslación es un mapa óptimo. Comparar con el Lema 10.1.4: para $p = 2$ hay una descomposición exacta, ¿vale algo análogo para $p \neq 2$?

EJERCICIO 10.3 (Masa que se escapa). Sea $\mu_n = (1 - \frac{1}{n})\delta_0 + \frac{1}{n}\delta_{a_n}$ con $a_n \rightarrow +\infty$.

- (a) Probar que $\mu_n \rightarrow \delta_0$ para toda elección de a_n , y que $W_p(\mu_n, \delta_0)^p = \frac{1}{n} a_n^p$.
- (b) Elegir a_n de modo que $W_q(\mu_n, \delta_0) \rightarrow 0$ pero $W_p(\mu_n, \delta_0) \rightarrow +\infty$, para $1 \leq q < p$ dados. Interpretar en términos del Teorema 10.3.1: ¿qué momento deja de converger?
- (c) Probar que $\mathcal{P}_p(\mathbb{R}^d)$ con la topología de W_p no es localmente compacto: la bola $\{W_p(\mu, \delta_0) \leq 1\}$ no es compacta.

EJERCICIO 10.4 (Convergencia contra funciones Lipschitz). Sean $\mu_n, \mu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R}^d)$ tales que $\int \varphi d\mu_n \rightarrow \int \varphi d\mu$ para toda φ 1-Lipschitz. Probar que $\mu_n \rightarrow \mu$ (convergencia contra C_b). *Sugerencia:* aproximar $g \in C_b$ uniformemente sobre compactos por funciones Lipschitz acotadas (Ejercicio 2.5), y usar que la familia $\{\mu_n\}$ es ajustada: la función $\varphi(x) = |x|$ es 1-Lipschitz, así que $\int |x| d\mu_n$ está acotado. ¿Es cierta la recíproca? (Comparar con el Ejercicio 10.3.)

EJERCICIO 10.5 (La fórmula del área vía Kantorovich–Rubinstein). Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$.

- Probar que para toda φ 1-Lipschitz con soporte compacto, $\int \varphi d(\mu - \nu) = -\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)(F_\mu(x) - F_\nu(x)) dx$ (integrar por partes, o usar Fubini), y deducir $W_1(\mu, \nu) \leq \int_{\mathbb{R}} |F_\mu - F_\nu| dx$ a partir del Teorema 10.6.2.
- Probar la igualdad $W_1(\mu, \nu) = \int_{\mathbb{R}} |F_\mu - F_\nu| dx$ tomando φ con $\varphi' = -\text{sgn}(F_\mu - F_\nu)$, primero para medidas con soporte compacto y luego en general por aproximación. Comparar con la Proposición 8.4.5.
- Probar que para $p > 1$, $W_p^p(\mu, \nu) \neq \int_{\mathbb{R}} |F_\mu - F_\nu|^p dx$ en general (el área entre las pseudoinversas y el área entre las distribuciones coinciden, pero las integrales de las potencias no). Dar un ejemplo.

EJERCICIO 10.6 (Transporte en el rectángulo). Sea $\Omega = [0, 3] \times [0, 2]$ y sean $\mu_0 = \rho_0 \mathcal{L}^2$, $\mu_1 = \rho_1 \mathcal{L}^2$ con

$$\rho_0 = \begin{cases} \frac{2}{9}, & x \leq 1 \text{ o } (1 < x < 2, y \leq 1), \\ \frac{1}{9}, & x \geq 2 \text{ o } (1 < x < 2, y > 1), \end{cases} \quad \rho_1 = \begin{cases} \frac{2}{9}, & x \geq 2 \text{ o } (1 < x < 2, y \leq 1), \\ \frac{1}{9}, & x \leq 1 \text{ o } (1 < x < 2, y > 1). \end{cases}$$

- Representar gráficamente ρ_0 y ρ_1 y verificar que son densidades de probabilidad.
- Probar que $u(x, y) = -x$ es 1-Lipschitz y que $\int u d(\mu_0 - \mu_1) = \frac{4}{9}$. Deducir $W_1(\mu_0, \mu_1) \geq \frac{4}{9}$.
- Para cada y fijo, comparar las funciones de distribución de $\rho_0(\cdot, y)$ y $\rho_1(\cdot, y)$ y probar, usando el Ejercicio 8.3, que existe un plan que mueve la masa sólo hacia la derecha a lo largo de rectas horizontales. Probar que ese plan satura $u(x) - u(x') = |x - x'|$ en su soporte y concluir que es óptimo y que $W_1(\mu_0, \mu_1) = \frac{4}{9}$.
- ¿Es único el plan óptimo? ¿Es único el potencial de Kantorovich?

EJERCICIO 10.7 (Del disco a una densidad radial, con costo $|x - y|$). Sean μ y ν las medidas del Ejercicio 9.3 y $c(x, y) = |x - y|$.

- Probar que $u(x) = -|x|$ es 1-Lipschitz y que $u(x) - u(y) = |x - y|$ si y sólo si $y = tx$ con $t \geq 1$ (mismo rayo, más lejos del origen).
- Deducir que el mapa radial T del Ejercicio 9.3 es también óptimo para $c(x, y) = |x - y|$, y que $W_1(\mu, \nu) = \int (|T(x)| - |x|) d\mu = \int |y| d\nu - \int |x| d\mu$.
- Probar que, a diferencia del caso cuadrático, el plan óptimo no es único: cualquier plan que mueva la masa a lo largo de rayos alejándola del origen es óptimo.

EJERCICIO 10.8 (La distancia SNCF). Sea X un conjunto y $P: X \rightarrow (0, \infty)$ acotada. Se define $d(x, y) = 0$ si $x = y$ y $d(x, y) = P(x) + P(y)$ si $x \neq y$.

- Probar que d es una distancia en X (todo viaje pasa por un nodo central: así funciona una red ferroviaria centralizada en París, de donde el nombre, por la *Société Nationale des Chemins de fer Français*).

- (b) Probar que para $\mu, \nu \in \mathcal{P}(X)$,

$$\min_{\Pi(\mu, \nu)} \int d \, d\pi = \int_X P \, d|\mu - \nu|.$$

Sugerencia: la masa común $\mu \wedge \nu$ conviene dejarla quieta; el resto paga P al salir y P al llegar. Para la cota inferior usar el Ejercicio 6.3 con $\varphi = P$ sobre un conjunto donde se concentra $(\mu - \nu)^+$ y $\varphi = -P$ en su complemento; verificar que φ es 1-Lipschitz para d .

EJERCICIO 10.9 (Distancia a un conjunto). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ compacto, $\Sigma \subset \Omega$ cerrado y $\mu = f\mathcal{L}^d \in \mathcal{P}(\Omega)$.

- (a) Probar que $\int_{\Omega} d(x, \Sigma) \, d\mu(x) = \min\{W_1(\mu, \nu) : \nu \in \mathcal{P}(\Sigma)\}$, y que el mínimo se alcanza en $\nu = (p_{\Sigma})_{\#}\mu$ para cualquier selección medible p_{Σ} de la proyección sobre Σ .
 (b) Probar el análogo con $d(x, \Sigma)^p$ y W_p^p , $p > 1$.
 (c) Si Σ es finito, $\#\Sigma = N$, se obtiene el problema de *cuantización óptima*

$$\min\{W_p^p(\mu, \nu) : \#\text{sop } \nu \leq N\} = \min_{\#\Sigma \leq N} \int_{\Omega} d(x, \Sigma)^p \, d\mu.$$

Para $p = 2$, probar que en un $\Sigma = \{x_1, \dots, x_N\}$ óptimo cada x_i es el baricentro de su celda de Voronoi $V_i = \{x : |x - x_i| \leq |x - x_j| \, \forall j\}$ respecto de μ .

EJERCICIO 10.10 (La distancia W_{∞}). Para μ, ν con soporte compacto se define

$$W_{\infty}(\mu, \nu) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \pi\text{-ess sup } |x - y|.$$

- (a) Probar que el ínfimo se alcanza y que W_{∞} es una distancia.
 (b) Probar que $W_p(\mu, \nu) \nearrow W_{\infty}(\mu, \nu)$ cuando $p \rightarrow \infty$.
 (c) Probar que si $p_n \rightarrow \infty$ y γ_n es óptimo para $|x - y|^{p_n}$, entonces, salvo subsucesión, $\gamma_n \rightarrow \gamma$ con γ óptimo para W_{∞} . *Sugerencia:* semicontinuidad inferior de $\pi \mapsto \pi\text{-ess sup } |x - y|$ respecto de la convergencia débil.
 (d) Probar que $d_H(\text{sop } \mu, \text{sop } \nu) \leq W_{\infty}(\mu, \nu)$, donde d_H es la distancia de Hausdorff, y dar un ejemplo con desigualdad estricta.

EJERCICIO 10.11 (La interpolación lineal no es geodésica). Sean $\mu = \delta_0$, $\nu = \delta_1$ en $\mathbb{R}$ y $\nu_t = (1 - t)\mu + t\nu$.

- (a) Calcular $W_2(\nu_s, \nu_t) = \sqrt{|t - s|}$ y deducir que la curva $t \mapsto \nu_t$ tiene longitud infinita en $(\mathcal{P}_2, W_2)$, mientras que la geodésica $\mu_t = \delta_t$ tiene longitud 1.
 (b) Para $\mu, \nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ cualesquiera, probar que $W_2^2(\nu_s, \nu_t) \leq |t - s| W_2^2(\mu, \nu)$: la interpolación lineal es siempre $\frac{1}{2}$ -Hölder. Probar que si μ y ν son discretas con soportes disjuntos, la longitud es infinita. (★) Mostrar en cambio que si $\mu = f\mathcal{L}^d$ y $\nu = g\mathcal{L}^d$ con f, g suaves y positivas en un dominio acotado y regular, la longitud es finita: existe un campo ξ con $\nabla \cdot (f\xi) = f - g$ y $\int |\xi|^2 f < \infty$, y entonces $W_2(\nu_s, \nu_t) \leq C|t - s|$ (comparar con la fórmula de Benamou–Brenier, [19, Sec. 5.4]).
 (c) Probar que $t \mapsto W_2^2(\nu_t, \mu)$ es convexa (es la restricción del funcional del Lema 12.3.1 a un segmento) y comparar con el Ejercicio 12.9.

Ejercicios computacionales. Los ejercicios siguientes se resuelven con el cuaderno *Distancias de Wasserstein* (véase el Apéndice E); los enunciados figuran también al final del cuaderno. Las referencias a secciones son a las del cuaderno.

EJERCICIO 10.12 (Escala). Probar numéricamente, y luego a mano, que $W_p(\lambda_{\#}\mu, \lambda_{\#}\nu) = \lambda W_p(\mu, \nu)$ para la dilatación $x \mapsto \lambda x$, $\lambda > 0$, y que W_p es invariante por traslaciones simultáneas de ambas medidas (Ejercicio 10.2).

EJERCICIO 10.13 (Traslaciones). Para $\nu = (\tau_v)_{\#}\mu$, con $\tau_v(x) = x + v$, se tiene $W_p(\mu, \nu) \leq |v|$. Probar que para $p = 2$ hay siempre igualdad y verificarlo numéricamente con medidas discretas. (*Sugerencia:* probar primero la descomposición $W_2^2(\mu, \nu) = |m_{\mu} - m_{\nu}|^2 + W_2^2(\tilde{\mu}, \tilde{\nu})$, donde m_{μ} denota la media de μ y $\tilde{\mu}, \tilde{\nu}$ las medidas centradas.)

EJERCICIO 10.14 (La interpolación lineal tiene longitud infinita). Para $\mu = \delta_0$ y $\nu = \delta_1$ en $\mathbb{R}$, mostrar que $W_2((1-s)\mu + s\nu, (1-t)\mu + t\nu) = \sqrt{|t-s|}$ y deducir que la curva $t \mapsto (1-t)\mu + t\nu$ tiene longitud infinita en $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}), W_2)$. Comparar con la Sección 5.1 del cuaderno y con el Ejercicio 10.11.

EJERCICIO 10.15 (Un tercer exponente). Extender la construcción de la Sección 4 del cuaderno para exhibir, para cada par $1 \leq q < p$, una sucesión μ_n con $W_q(\mu_n, \delta_0) \rightarrow 0$ pero $W_p(\mu_n, \delta_0) \rightarrow \infty$ (cf. Ejercicio 10.3).

EJERCICIO 10.16 (Kantorovich–Rubinstein con el solver exacto). El solver exacto devuelve también potenciales duales (`ot.emd(a, b, M, log=True)`). Comparar los potenciales (u, v) así obtenidos con la función 1-Lipschitz φ de la Sección 6 del cuaderno: no tienen por qué coincidir (¿por qué?), pero el valor dual $\sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j$ debe ser $W_1(\mu, \nu)$. ¿Es $v = -u$ sobre los puntos comunes a ambos soportes? ¿Por qué no necesariamente?

Capítulo 11

La desigualdad de Brunn–Minkowski

Este capítulo corto es una aplicación geométrica del teorema de Brenier y de las geodésicas del capítulo anterior. La desigualdad de Brunn–Minkowski es uno de los resultados clásicos de la geometría convexa: relaciona el volumen de la suma de dos conjuntos con los volúmenes de cada uno, y de ella se deduce, entre otras cosas, la desigualdad isoperimétrica. Tiene varias demostraciones clásicas [13]; la que presentamos, debida a McCann [15], muestra que la desigualdad es una consecuencia casi inmediata de dos hechos: que el mapa de Brenier es el gradiente de una función convexa, y que la función $M \mapsto (\det M)^{1/d}$ es cóncava sobre las matrices simétricas definidas positivas.

Siguiendo el criterio del Capítulo 9, demostraremos el resultado bajo una hipótesis de regularidad sobre el potencial de Brenier —que sea de clase C^2 — e indicaremos con referencias cómo se elimina esa hipótesis. El capítulo no se usa en lo que sigue.

11.1. Enunciado

Dados $A, B \subset \mathbb{R}^d$, su *suma de Minkowski* es

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\},$$

y para $\lambda > 0$ escribimos $\lambda A = \{\lambda a : a \in A\}$. Si A y B son compactos, $A + B$ es compacto, por ser la imagen del compacto $A \times B$ por la aplicación continua $(a, b) \mapsto a + b$; en particular es medible. Denotamos por $|E| = \mathcal{L}^d(E)$ la medida de Lebesgue de un boreliano $E \subset \mathbb{R}^d$, y recordemos que $|\lambda E| = \lambda^d |E|$.

TEOREMA 11.1.1 (Brunn–Minkowski). *Sean $A, B \subset \mathbb{R}^d$ compactos no vacíos. Entonces*

$$|A + B|^{1/d} \geq |A|^{1/d} + |B|^{1/d}.$$

El caso más ilustrativo es el de dos bolas: si $A = B(a, r)$ y $B = B(b, s)$ entonces $A + B = B(a + b, r + s)$ y la desigualdad es una igualdad, pues $|B(x, \rho)|^{1/d} = \omega_d^{1/d} \rho$ con $\omega_d = |B(0, 1)|$. En cambio, si A es un cubo y B un segmento no paralelo a ninguna de sus caras, $A + B$ tiene volumen estrictamente mayor que $|A|$ aunque $|B| = 0$: la desigualdad dice que agregar un conjunto de medida nula puede aumentar el volumen, pero acota por debajo cuánto lo hace.

La desigualdad admite una formulación equivalente en términos de combinaciones convexas de conjuntos, que es la que la demostración por transporte produce naturalmente.

PROPOSICIÓN 11.1.2. *El Teorema 11.1.1 es equivalente a la siguiente afirmación: para todo $t \in [0, 1]$ y todo par de compactos no vacíos $A, B \subset \mathbb{R}^d$,*

$$(11.1.1) \quad |(1-t)A + tB|^{1/d} \geq (1-t)|A|^{1/d} + t|B|^{1/d}.$$

DEMOSTRACIÓN. Si vale el Teorema 11.1.1, aplicándolo a los compactos $(1-t)A$ y tB y usando la homogeneidad de la medida de Lebesgue,

$$|(1-t)A + tB|^{1/d} \geq |(1-t)A|^{1/d} + |tB|^{1/d} = (1-t)|A|^{1/d} + t|B|^{1/d}.$$

Recíprocamente, si vale (11.1.1), tomando $t = \frac{1}{2}$ y usando que $A + B = 2(\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B)$,

$$|A + B|^{1/d} = 2|\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B|^{1/d} \geq 2\left(\frac{1}{2}|A|^{1/d} + \frac{1}{2}|B|^{1/d}\right) = |A|^{1/d} + |B|^{1/d}.$$

□

La forma (11.1.1) dice que la función $t \mapsto |(1-t)A + tB|^{1/d}$ es mayor o igual que la interpolación lineal entre sus valores en los extremos; de hecho, aplicándola a los conjuntos $(1-s)A + sB$ y $(1-r)A + rB$, se obtiene que esa función es *cóncava* en $[0, 1]$. Es esta concavidad la que conecta con la geometría del capítulo anterior: la curva de conjuntos $t \mapsto (1-t)A + tB$ es la imagen geométrica de una geodésica en $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), W_2)$.

OBSERVACIÓN 11.1.3 (La desigualdad isoperimétrica). Sea A compacto y $B = \overline{B(0, 1)}$ la bola unitaria cerrada. Entonces $A + \varepsilon B$ es el ε -entorno cerrado de A , y el Teorema 11.1.1 da

$$|A + \varepsilon B| \geq (|A|^{1/d} + \varepsilon \omega_d^{1/d})^d \geq |A| + d \omega_d^{1/d} |A|^{(d-1)/d} \varepsilon,$$

donde la segunda desigualdad es la convexidad de $s \mapsto s^d$. Si el límite

$$\text{Per}(A) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|A + \varepsilon B| - |A|}{\varepsilon}$$

existe —para conjuntos con borde suficientemente regular es el área de superficie del borde, y se llama *contenido de Minkowski*—, se obtiene

$$\text{Per}(A) \geq d \omega_d^{1/d} |A|^{(d-1)/d},$$

que es la desigualdad isoperimétrica: entre los conjuntos de volumen dado, la bola tiene el menor perímetro (para la bola de radio r ambos miembros valen $d \omega_d r^{d-1}$). Para $d = 2$ la desigualdad se lee $L^2 \geq 4\pi \text{Área}$, la forma clásica.

11.2. Dos lemas

La demostración usa dos ingredientes elementales que aislamos.

LEMA 11.2.1 (Desigualdad de Minkowski para determinantes). Sea $M \in \mathbb{R}^{d \times d}$ simétrica definida positiva y $t \in [0, 1]$. Entonces

$$\det((1-t)I + tM)^{1/d} \geq (1-t) + t(\det M)^{1/d}.$$

DEMOSTRACIÓN. Sean $\lambda_1, \dots, \lambda_d > 0$ los autovalores de M . La matriz $(1-t)I + tM$ tiene los mismos autovectores, con autovalores $(1-t) + t\lambda_i$, de modo que hay que probar

$$\prod_{i=1}^d ((1-t) + t\lambda_i)^{1/d} \geq (1-t) + t \prod_{i=1}^d \lambda_i^{1/d}.$$

Escribamos $a_i = 1-t$ y $b_i = t\lambda_i$, de modo que el miembro derecho es $\prod a_i^{1/d} + \prod b_i^{1/d}$ y el izquierdo es $\prod (a_i + b_i)^{1/d}$. Si $t \in \{0, 1\}$ la desigualdad es trivial; si $t \in (0, 1)$ todos

los a_i, b_i son positivos y podemos dividir por $\prod (a_i + b_i)^{1/d}$. Por la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$\prod_{i=1}^d \left(\frac{a_i}{a_i + b_i} \right)^{1/d} + \prod_{i=1}^d \left(\frac{b_i}{a_i + b_i} \right)^{1/d} \leq \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \frac{a_i}{a_i + b_i} + \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \frac{b_i}{a_i + b_i} = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \frac{a_i + b_i}{a_i + b_i} = 1,$$

que es lo que queríamos. $\square$

OBSERVACIÓN 11.2.2. El lema dice que $M \mapsto (\det M)^{1/d}$ es cóncava a lo largo del segmento que une I con M . De hecho es cóncava en todo el cono de matrices simétricas definidas positivas (la desigualdad general $\det(M + N)^{1/d} \geq (\det M)^{1/d} + (\det N)^{1/d}$ se reduce a la anterior escribiendo $M + N = M^{1/2}(I + M^{-1/2}NM^{-1/2})M^{1/2}$), pero sólo necesitaremos el caso del enunciado.

El segundo lema es la ecuación que satisface la densidad transportada por un mapa regular; es la Proposición 1.3.2 del Capítulo 1 sobre cambio de variables, en la forma en que la vamos a usar.

LEMA 11.2.3 (Ecuación de Monge–Ampère). Sean $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{R}^d$ abiertos acotados, $u \in C^2(\Omega)$ convexa tal que $T = \nabla u$ es un difeomorfismo de clase C^1 de Ω sobre Ω' , y sean μ y ν las medidas uniformes en Ω y Ω' respectivamente. Si $T_{\#}\mu = \nu$, entonces

$$\det D^2u(x) = \frac{|\Omega'|}{|\Omega|} \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

DEMOSTRACIÓN. Las densidades son $\rho_0 = \mathbf{1}_{\Omega}/|\Omega|$ y $\rho_1 = \mathbf{1}_{\Omega'}/|\Omega'|$, ambas continuas en los abiertos respectivos. Por la fórmula de cambio de variables para difeomorfismos (como en la Proposición 1.3.2), para todo boreliano $E \subset \Omega'$,

$$\nu(E) = \mu(T^{-1}(E)) = \frac{|T^{-1}(E)|}{|\Omega|} = \frac{1}{|\Omega|} \int_E |\det DT^{-1}(y)| dy,$$

mientras que $\nu(E) = |E|/|\Omega'|$. Como E es arbitrario y el integrando es continuo, $|\det DT^{-1}(y)| = |\Omega|/|\Omega'|$ para todo $y \in \Omega'$, y componiendo con T , $|\det DT(x)| = |\Omega'|/|\Omega|$ para todo $x \in \Omega$. Finalmente $DT = D^2u$ es simétrica y, por la convexidad de u , semidefinida positiva; como su determinante no se anula, es definida positiva y $\det D^2u > 0$, lo que permite quitar el valor absoluto. $\square$

11.3. Demostración vía transporte óptimo

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^d$ compactos con $|A|, |B| > 0$ (si alguno tiene medida nula la desigualdad (11.1.1) es inmediata, pues $(1-t)A + tB$ contiene un trasladado de tB y de $(1-t)A$). Consideremos las medidas uniformes

$$\mu_A = \frac{\mathbf{1}_A}{|A|} \mathcal{L}^d, \quad \mu_B = \frac{\mathbf{1}_B}{|B|} \mathcal{L}^d,$$

que tienen soporte compacto y son absolutamente continuas. Por el Teorema de Brenier 9.1.3 existe una función convexa $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $T = \nabla u$ satisface $T_{\#}\mu_A = \mu_B$, y por la Observación 10.5.3, la interpolación de McCann $T_t = (1-t)\text{id} + tT$ describe la geodésica de W_2 que une μ_A con μ_B .

La idea de la demostración es la siguiente: T_t envía (casi todo) A dentro de $(1-t)A + tB$, de modo que el volumen de este último conjunto está acotado por debajo por

el volumen de $T_t(A)$, que se calcula con el Jacobiano de T_t ; y ese Jacobiano se controla con el Lema 11.2.1 y la ecuación de Monge–Ampère.

Para hacer riguroso este esquema con las herramientas que tenemos, supondremos lo siguiente.

Hipótesis de regularidad (R). Los conjuntos A y B tienen borde de medida nula, $|\partial A| = |\partial B| = 0$, y el potencial de Brenier u entre μ_A y μ_B es de clase C^2 en un abierto que contiene a A , con $T = \nabla u$ un difeomorfismo de clase C^1 de $\text{int } A$ sobre $\text{int } B$.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 11.1.1 BAJO (R). Por la Proposición 11.1.2 basta probar (11.1.1) para $t \in (0, 1)$. Escribamos $\Omega = \text{int } A$ y $\Omega' = \text{int } B$; por (R), $|\Omega| = |A|$ y $|\Omega'| = |B|$, y μ_A, μ_B son las medidas uniformes en Ω y Ω' .

Paso 1: T_t es una inyección de Ω en $(1-t)A + tB$. Si $x \in \Omega$ entonces $T(x) \in \Omega' \subset B$ y $x \in A$, de modo que $T_t(x) = (1-t)x + tT(x) \in (1-t)A + tB$. Para la inyectividad usamos la monotonía del gradiente de una función convexa (Observación D.2.3 o, directamente, la Proposición D.4.1): $(T(x) - T(y)) \cdot (x - y) \geq 0$ para todo x, y , y por lo tanto

$$(T_t(x) - T_t(y)) \cdot (x - y) = (1-t)|x - y|^2 + t(T(x) - T(y)) \cdot (x - y) \geq (1-t)|x - y|^2,$$

que es positivo si $x \neq y$. Luego $T_t(x) \neq T_t(y)$.

Paso 2: el Jacobiano de T_t . Por (R), T_t es de clase C^1 en Ω con

$$DT_t(x) = (1-t)I + tD^2u(x),$$

que es simétrica definida positiva porque $D^2u(x)$ es simétrica semidefinida positiva (convexidad de u) y $t < 1$. En particular T_t es un difeomorfismo de Ω sobre su imagen (es inyectiva por el Paso 1 y su diferencial es inversible en todo punto, luego es un homeomorfismo local C^1 por el teorema de la función inversa). Por el Lema 11.2.3, $\det D^2u(x) = |B|/|A|$ para todo $x \in \Omega$, y por el Lema 11.2.1,

$$\det DT_t(x)^{1/d} = \det((1-t)I + tD^2u(x))^{1/d} \geq (1-t) + t\left(\frac{|B|}{|A|}\right)^{1/d} \quad \text{para todo } x \in \Omega.$$

Paso 3: conclusión. Por la fórmula de cambio de variables para el difeomorfismo T_t de Ω sobre $T_t(\Omega)$, y usando el Paso 1 y el Paso 2,

$$\begin{aligned} |(1-t)A + tB| &\geq |T_t(\Omega)| = \int_{\Omega} \det DT_t(x) dx \\ &\geq \int_{\Omega} \left((1-t) + t\left(\frac{|B|}{|A|}\right)^{1/d} \right)^d dx = |A| \left((1-t) + t\left(\frac{|B|}{|A|}\right)^{1/d} \right)^d. \end{aligned}$$

Tomando raíz d -ésima,

$$|(1-t)A + tB|^{1/d} \geq |A|^{1/d} \left((1-t) + t\frac{|B|^{1/d}}{|A|^{1/d}} \right) = (1-t)|A|^{1/d} + t|B|^{1/d},$$

que es (11.1.1). □

OBSERVACIÓN 11.3.1 (El caso general). La hipótesis (R) se usa en tres lugares: para que $|\Omega| = |A|$, para que T_t sea un difeomorfismo, y para aplicar la fórmula clásica de cambio de variables con $\det DT_t = \det((1-t)I + tD^2u)$. Sin ella, la demostración se adapta así. Por el teorema de Alexandrov, una función convexa $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es dos veces diferenciable en $\mathcal{L}^d$ -casi todo punto, en el sentido de que admite un desarrollo de Taylor de segundo orden con una matriz simétrica semidefinida positiva $D^2u(x)$; véase [9, Theorem 6.9]. McCann [15] demostró que, para el mapa de Brenier entre medidas absolutamente continuas con densidades ρ_0 y ρ_1 , la ecuación de Monge–Ampère

$$\rho_0(x) = \rho_1(\nabla u(x)) \det D^2u(x)$$

vale para μ -casi todo x con ese Hessiano de Alexandrov, y que la fórmula de cambio de variables $|T_t(E)| \geq \int_E \det DT_t$ vale para los mapas $T_t = (1-t)\text{id} + t\nabla u$. Con esos dos hechos, los Pasos 1 a 3 se repiten palabra por palabra sobre el conjunto de puntos de A donde u es dos veces diferenciable, que tiene medida plena. Puede consultarse la demostración completa en [21, Chapter 6].

Vale la pena notar que, en el caso general, ni siquiera hace falta que A y B sean compactos: basta que sean borelianos de medida finita y positiva, y la única sutileza adicional es la medibilidad de $A+B$, que puede fallar para borelianos arbitrarios y por eso el enunciado clásico se da para compactos o se usa la medida exterior.

OBSERVACIÓN 11.3.2 (Convexidad por desplazamiento). La demostración anterior es un caso particular de un principio más general, también debido a McCann [15], que explica por qué el transporte óptimo es la herramienta natural para este tipo de desigualdades. Si $\mu_t = (T_t)_\# \mu_0$ es la interpolación de McCann entre dos medidas con densidades ρ_0 y ρ_1 , y ρ_t es la densidad de μ_t , entonces el funcional

$$\mathcal{F}(\mu) = - \int_{\mathbb{R}^d} \rho(x)^{1-1/d} dx$$

es *convexo a lo largo de la geodésica*: $t \mapsto \mathcal{F}(\mu_t)$ es convexa en $[0, 1]$. La razón es exactamente la del Paso 2: por la ecuación de Monge–Ampère, $\rho_t(T_t(x)) = \rho_0(x)/\det DT_t(x)$, y $\det DT_t(x)^{1/d}$ es cóncavo en t por el Lema 11.2.1. Para $\mu_0 = \mu_A$ y $\mu_1 = \mu_B$ uniformes, $\mathcal{F}(\mu_E) = -|E|^{1/d}$ para la medida uniforme en E , y la convexidad de $\mathcal{F}$ a lo largo de la geodésica es precisamente la concavidad de $t \mapsto |(1-t)A + tB|^{1/d}$ que discutimos tras la Proposición 11.1.2. Esta *convexidad por desplazamiento* de funcionales de la forma $\int F(\rho)$ es el punto de partida de la teoría de flujos gradiente en el espacio de Wasserstein, que queda fuera del alcance de estas notas; véase [3, Chapter 9] o [19, Chapter 7].

Ejercicios

EJERCICIO 11.1 (Casos elementales). (a) Probar la desigualdad de Brunn–Minkowski directamente para $d = 1$ (intervalos y, en general, compactos de $\mathbb{R}$) y para cajas

$$A = \prod_{i=1}^d [a_i, b_i], \quad B = \prod_{i=1}^d [c_i, d_i]$$

en $\mathbb{R}^d$ (usar la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica).

(b) Probar que hay igualdad si A y B son homotéticos ($B = \lambda A + v$).

- (c) Sea A un cubo y B un segmento no paralelo a ninguna cara de A . Calcular $|A + B|$ y comprobar que es estrictamente mayor que $|A|$ aunque $|B| = 0$.

EJERCICIO 11.2 (La forma multiplicativa). Probar que la desigualdad de Brunn-Minkowski es equivalente a su forma multiplicativa *sin exponentes*:

$$|(1-t)A + tB| \geq |A|^{1-t}|B|^t \quad \text{para todo } t \in [0, 1]$$

(para A, B compactos de medida positiva). *Sugerencia*: para deducir la forma aditiva de la multiplicativa, aplicarla a $A' = |A|^{-1/d}A$, $B' = |B|^{-1/d}B$ y un t bien elegido; para la recíproca, usar la desigualdad entre medias. Observar que la forma multiplicativa no depende de la dimensión, lo que es útil para demostrarla por inducción (desigualdad de Prékopa-Leindler).

EJERCICIO 11.3 (Una identidad de la matriz de cofactores). Sea $u \in C^3(\Omega)$ y $M(x) = \text{cof}(D^2u(x))$ la matriz de cofactores de su hessiano, de modo que $M D^2u = (\det D^2u) I$.

- (a) Probar que $\sum_i \partial_i M_{ij} = 0$ para todo j (cada columna de M es un campo de divergencia nula). *Sugerencia*: escribir M_{ij} como un determinante de orden $d-1$ y usar la simetría de las derivadas terceras de u .
- (b) Deducir la *forma de divergencia* de la ecuación de Monge-Ampère: $\det D^2u = \frac{1}{d} \sum_{ij} \partial_i (M_{ij} \partial_j u)$.
- (c) Usar (b) para dar otra demostración del Lema 11.2.3 en la forma integral: si $T = \nabla u$ es un difeomorfismo de Ω sobre Ω' , entonces $\int_{\Omega} \det D^2u \, dx = |\Omega'|$.

EJERCICIO 11.4 (La desigualdad isoperimétrica). Sea $A \subset \mathbb{R}^d$ compacto con $|A| > 0$ y sea $\text{Per}(A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{|A + \varepsilon B(0,1)| - |A|}{\varepsilon}$ su contenido de Minkowski, que suponemos existe.

- (a) Deducir del Teorema 11.1.1 la desigualdad isoperimétrica

$$\text{Per}(A) \geq d \omega_d^{1/d} |A|^{(d-1)/d},$$

completando los detalles de la Observación 11.1.3.

- (b) Verificar que para bolas hay igualdad y que para un cubo de lado ℓ el contenido de Minkowski es $2d \ell^{d-1}$; comparar ambos miembros en ese caso.
- (c) Para $d = 2$, deducir la forma clásica $L^2 \geq 4\pi \text{Área}$ para dominios con borde C^1 (aceptando que el contenido de Minkowski coincide con la longitud del borde).

EJERCICIO 11.5 (Convexidad por desplazamiento de la entropía). Sean $\mu_0 = \rho_0 \mathcal{L}^d$ y $\mu_1 = \rho_1 \mathcal{L}^d$ con densidades continuas y positivas en abiertos acotados Ω_0, Ω_1 , y supongamos que el mapa de Brenier $T = \nabla u$ entre ellas satisface la hipótesis (R) de la Sección 11.3 ($u \in C^2$, T difeomorfismo). Sea $\mu_t = (T_t)_\# \mu_0$ la interpolación de McCann, con densidad ρ_t .

- (a) Probar la ecuación de Monge-Ampère $\rho_t(T_t(x)) \det DT_t(x) = \rho_0(x)$.
- (b) Probar que la *entropía* $\mathcal{H}(\mu_t) = \int \rho_t \log \rho_t \, dx$ satisface

$$\mathcal{H}(\mu_t) = \int \rho_0(x) \log \rho_0(x) \, dx - \int \rho_0(x) \log \det((1-t)I + tD^2u(x)) \, dx,$$

y que $t \mapsto \log \det((1-t)I + tM)$ es cóncava para M simétrica definida positiva. Concluir que $t \mapsto \mathcal{H}(\mu_t)$ es convexa.

- (c) Probar, con el Lema 11.2.1, que $t \mapsto \int \rho_t^m dx$ es convexa si $m > 1$ y cóncava si $1 - \frac{1}{d} \leq m < 1$ (de modo que $-\int \rho_t^m$ es convexa, como en la Observación 11.3.2).
Sugerencia: $\int \rho_t^m = \int \rho_0^m (\det DT_t)^{1-m}$, y $(\det DT_t)^{1/d}$ es cóncava y positiva en t .

EJERCICIO 11.6 (★ Una desigualdad de tipo Sobolev). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ convexo y acotado, $f \in W^{1,p}(\Omega)$, y $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\Omega)$ con densidades acotadas por C en L^r . Probar que si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{q'r} = 1 + \frac{1}{r}$, entonces

$$\int_{\Omega} f d(\mu - \nu) \leq C^{1/q'} \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)} W_q(\mu, \nu).$$

Esquema: escribir $\int f d(\nu - \mu) = \int_0^1 \int \nabla f(T_t(x)) \cdot (T_t(x) - x) d\mu dt$ con T el mapa de Brenier y T_t la interpolación; aplicar Hölder con exponentes $(p, q, \cdot)$, y controlar $\|\rho_t\|_{L^r}$ uniformemente en t mediante la concavidad de $t \mapsto \det DT_t^{1/d}$ (Lema 11.2.1), que da $\rho_t \leq \max\{\|\rho_0\|_{\infty}, \|\rho_1\|_{\infty}\}$ en el caso $r = \infty$ y la cota L^r en general. Ver [19, Sec. 5.5].

Baricentros de Wasserstein

En un espacio euclídeo, el baricentro de puntos $x_1, \dots, x_N$ con pesos $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ es el punto $\bar{x} = \sum_i \lambda_i x_i$, que se caracteriza variacionalmente como el minimizador de $x \mapsto \sum_i \lambda_i |x - x_i|^2$. Esta caracterización tiene sentido en cualquier espacio métrico, y en particular en $(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d), W_2)$: dado un conjunto de medidas $\mu_1, \dots, \mu_N$, su *baricentro de Wasserstein* es la medida que minimiza la suma ponderada de los cuadrados de las distancias W_2 a cada una de ellas.

El concepto, introducido por Agueh y Carlier [1], es la respuesta que da el transporte óptimo a una pregunta muy natural: ¿cómo *promediar* distribuciones de probabilidad? La respuesta ingenua, la mezcla $\sum_i \lambda_i \mu_i$, promedia las densidades punto a punto y no respeta la geometría: la mezcla de dos gaussianas alejadas es bimodal, mientras que el baricentro de Wasserstein es una gaussiana intermedia. Esta diferencia es la razón por la que los baricentros de Wasserstein se usan en estadística (para promediar histogramas, imágenes o formas) y en aprendizaje automático.

En este capítulo definimos los baricentros, probamos su existencia en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, discutimos su unicidad, los conectamos con el problema multimarginal anticipado en el Capítulo 7 y los calculamos explícitamente en dos casos: en dimensión uno y para gaussianas. En el Capítulo 13 veremos cómo calcularlos numéricamente.

12.1. Definición y primeros ejemplos

A lo largo del capítulo fijamos $N \geq 1$, medidas $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y pesos $\lambda_1, \dots, \lambda_N > 0$ con $\sum_i \lambda_i = 1$.

DEFINICIÓN 12.1.1 (Baricentro de Wasserstein). El *funcional de baricentro* asociado a $(\mu_i, \lambda_i)_{i=1}^N$ es

$$\mathcal{F}(\mu) = \sum_{i=1}^N \lambda_i W_2^2(\mu, \mu_i), \quad \mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d).$$

Un *baricentro de Wasserstein* de (μ_i, λ_i) es un minimizador de $\mathcal{F}$ en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

Obsérvese que $\mathcal{F}$ toma valores finitos en todo $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ (Sección 10.1), de modo que $\inf \mathcal{F} < \infty$. Antes de probar que el ínfimo se alcanza, veamos los dos casos en que la respuesta se adivina.

EJEMPLO 12.1.2 (Deltas de Dirac). Sean $\mu_i = \delta_{x_i}$ con $x_i \in \mathbb{R}^d$, y sea $\bar{x} = \sum_i \lambda_i x_i$. Entonces el único baricentro es $\delta_{\bar{x}}$. En efecto, por el Ejemplo 10.1.2, para toda $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,

$$\mathcal{F}(\mu) = \sum_i \lambda_i \int |x - x_i|^2 d\mu(x) = \int \left(\sum_i \lambda_i |x - x_i|^2 \right) d\mu(x).$$

Ahora bien, para todo $x \in \mathbb{R}^d$ vale la *identidad de la varianza*

$$(12.1.1) \quad \sum_i \lambda_i |x - x_i|^2 = |x - \bar{x}|^2 + \sum_i \lambda_i |\bar{x} - x_i|^2,$$

que se comprueba desarrollando $|x - x_i|^2 = |(x - \bar{x}) + (\bar{x} - x_i)|^2$ y usando que $\sum_i \lambda_i (\bar{x} - x_i) = 0$. Por lo tanto

$$\mathcal{F}(\mu) = \int |x - \bar{x}|^2 d\mu(x) + \sum_i \lambda_i |\bar{x} - x_i|^2 \geq \sum_i \lambda_i |\bar{x} - x_i|^2 = \mathcal{F}(\delta_{\bar{x}}),$$

con igualdad si y sólo si $\int |x - \bar{x}|^2 d\mu = 0$, es decir, si y sólo si $\mu = \delta_{\bar{x}}$.

El ejemplo muestra que el baricentro de Wasserstein extiende al baricentro euclídeo, y que la identidad (12.1.1) —que reaparecerá varias veces— es la herramienta básica. El segundo ejemplo conecta con las geodésicas del Capítulo 10.

PROPOSICIÓN 12.1.3 (Dos medidas). *Sean $N = 2$, $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y pesos $(1-t, t)$ con $t \in (0, 1)$. Sea μ_t la interpolación por desplazamiento entre μ_0 y μ_1 a lo largo de un plan óptimo (Definición 10.5.1). Entonces μ_t es un baricentro de (μ_0, μ_1) con pesos $(1-t, t)$, y*

$$\min_{\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)} \{(1-t)W_2^2(\mu, \mu_0) + tW_2^2(\mu, \mu_1)\} = t(1-t)W_2^2(\mu_0, \mu_1).$$

Más aún, toda medida μ que realice el mínimo satisface $W_2(\mu_0, \mu) = tW_2(\mu_0, \mu_1)$ y $W_2(\mu, \mu_1) = (1-t)W_2(\mu_0, \mu_1)$.

DEMOSTRACIÓN. Escribamos $W = W_2(\mu_0, \mu_1)$ y, para $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, $a = W_2(\mu_0, \mu)$ y $b = W_2(\mu, \mu_1)$. Por la desigualdad triangular, $a + b \geq W$. Por la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} W &\leq a + b = \sqrt{1-t}a \cdot \frac{1}{\sqrt{1-t}} + \sqrt{t}b \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \\ &\leq \sqrt{(1-t)a^2 + tb^2} \sqrt{\frac{1}{1-t} + \frac{1}{t}} = \frac{\sqrt{(1-t)a^2 + tb^2}}{\sqrt{t(1-t)}}, \end{aligned}$$

de donde $\mathcal{F}(\mu) = (1-t)a^2 + tb^2 \geq t(1-t)W^2$ para toda μ .

Por otra parte, el Teorema 10.5.2 da $W_2(\mu_0, \mu_t) = tW$ y $W_2(\mu_t, \mu_1) = (1-t)W$, de modo que

$$\mathcal{F}(\mu_t) = (1-t)t^2W^2 + t(1-t)^2W^2 = t(1-t)W^2,$$

y μ_t realiza el mínimo.

Finalmente, si μ realiza el mínimo, en la cadena de desigualdades anterior valen todas las igualdades. La igualdad en Cauchy-Schwarz fuerza que los vectores $(\sqrt{1-t}a, \sqrt{t}b)$ y $(1/\sqrt{1-t}, 1/\sqrt{t})$ sean proporcionales, es decir, $(1-t)a = tb$; junto con $a + b = W$ resulta $a = tW$, $b = (1-t)W$. $\square$

Así, para dos medidas el baricentro es un punto de la geodésica que las une, a distancia proporcional a los pesos: exactamente lo que ocurre con dos puntos de $\mathbb{R}^d$. Si el plan óptimo entre μ_0 y μ_1 no es único puede haber varios baricentros (uno por cada geodésica); la unicidad bajo las hipótesis de Brenier se seguirá del Teorema 12.3.2.

12.2. Existencia

TEOREMA 12.2.1 (Existencia de baricentros). *Sean $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y (λ_i) un vector de pesos. Entonces el funcional $\mathcal{F}$ alcanza su mínimo en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$: existe al menos un baricentro.*

DEMOSTRACIÓN. Aplicamos el método directo del cálculo de variaciones (Capítulo 2). Sea (ν_n) una sucesión minimizante, de modo que $\mathcal{F}(\nu_n) \leq C$ para todo n .

Momentos acotados. Como $\lambda_1 W_2^2(\nu_n, \mu_1) \leq \mathcal{F}(\nu_n) \leq C$, por (10.1.2) y la desigualdad triangular,

$$\left(\int |x|^2 d\nu_n \right)^{1/2} = W_2(\nu_n, \delta_0) \leq W_2(\nu_n, \mu_1) + W_2(\mu_1, \delta_0) \leq \sqrt{C/\lambda_1} + \left(\int |x|^2 d\mu_1 \right)^{1/2} =: M,$$

con M independiente de n .

Compacidad. Por la desigualdad de Markov, $\nu_n(B(0, R)^c) \leq M^2/R^2$ para todo n , de modo que (ν_n) es ajustada y, por el Teorema de Prokhorov 2.2.6, una subsucesión —que seguimos llamando (ν_n) — converge débilmente a cierta $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$.

Semicontinuidad inferior. Para cada i , el Lema 10.4.1 (con $\mu = \mu_i$ y $\nu_k = \nu_n$, cuyos segundos momentos están acotados por M^2) da $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y $W_2^2(\mu_i, \nu) \leq \liminf_n W_2^2(\mu_i, \nu_n)$. Sumando con los pesos $\lambda_i > 0$,

$$\mathcal{F}(\nu) \leq \sum_i \lambda_i \liminf_n W_2^2(\mu_i, \nu_n) \leq \liminf_n \sum_i \lambda_i W_2^2(\mu_i, \nu_n) = \liminf_n \mathcal{F}(\nu_n) = \inf \mathcal{F}.$$

Luego ν es un baricentro. □

Cuando las medidas tienen soporte compacto, el baricentro también lo tiene, y podemos localizarlo.

LEMA 12.2.2 (Soporte del baricentro). *Sea $K \subset \mathbb{R}^d$ un convexo cerrado tal que $\mu_i(K) = 1$ para todo i . Entonces todo baricentro μ de (μ_i, λ_i) satisface $\mu(K) = 1$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $P: \mathbb{R}^d \rightarrow K$ la proyección ortogonal sobre K , que está bien definida y es 1-Lipschitz por ser K convexo cerrado, y sea μ un baricentro. Recordemos la desigualdad variacional que caracteriza a P : $(x - Px) \cdot (y - Px) \leq 0$ para todo $y \in K$. Entonces, para $x \in \mathbb{R}^d$ e $y \in K$,

$$|x - y|^2 = |x - Px|^2 + |Px - y|^2 + 2(x - Px) \cdot (Px - y) \geq |x - Px|^2 + |Px - y|^2,$$

de modo que $|Px - y| \leq |x - y|$, con desigualdad estricta si $x \notin K$.

Sea $\pi_i \in \Pi(\mu, \mu_i)$ un plan óptimo. Como $\mu_i(K) = 1$, se tiene $y \in K$ para π_i -c.t.p. (x, y) . El plan $(P, \text{id})_{\#} \pi_i$ pertenece a $\Pi(P_{\#} \mu, \mu_i)$, y por lo tanto

$$W_2^2(P_{\#} \mu, \mu_i) \leq \int |Px - y|^2 d\pi_i(x, y) \leq \int |x - y|^2 d\pi_i(x, y) = W_2^2(\mu, \mu_i).$$

Sumando, $\mathcal{F}(P_{\#} \mu) \leq \mathcal{F}(\mu)$. Si fuera $\mu(K^c) > 0$, la segunda desigualdad sería estricta (el integrando $|x - y|^2 - |Px - y|^2$ es positivo en el conjunto $K^c \times K$, que tiene π_i -medida $\mu(K^c) > 0$), y $P_{\#} \mu$ tendría energía estrictamente menor que la mínima, absurdo. Luego $\mu(K^c) = 0$. □

En particular, si todas las μ_i tienen soporte en una bola cerrada $\overline{B(0, R)}$, el baricentro también, y por lo tanto tiene soporte compacto.

12.3. Convexidad y unicidad

El funcional $\mathcal{F}$ es convexo respecto de la estructura *lineal* de las medidas —es decir, a lo largo de mezclas—, lo cual es la clave para la unicidad.

LEMA 12.3.1 (Convexidad de W_2^2 en mezclas). *Sean $\nu, \mu_a, \mu_b \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y $s \in [0, 1]$. Entonces*

$$W_2^2((1-s)\mu_a + s\mu_b, \nu) \leq (1-s)W_2^2(\mu_a, \nu) + sW_2^2(\mu_b, \nu).$$

En consecuencia, $\mathcal{F}$ es convexo a lo largo de mezclas y el conjunto de baricentros de (μ_i, λ_i) es convexo.

DEMOSTRACIÓN. Sean $\pi_a \in \Pi(\mu_a, \nu)$ y $\pi_b \in \Pi(\mu_b, \nu)$ óptimos. La mezcla $\pi = (1-s)\pi_a + s\pi_b$ es una medida de probabilidad con marginales $(1-s)\mu_a + s\mu_b$ y ν , es decir, un plan admisible, y su costo es $(1-s) \int |x-y|^2 d\pi_a + s \int |x-y|^2 d\pi_b$. La desigualdad se sigue tomando W_2^2 como ínfimo sobre planes admisibles. Las consecuencias son inmediatas. $\square$

TEOREMA 12.3.2 (Unicidad). *Supongamos que las medidas $\mu_1, \dots, \mu_N$ tienen soporte compacto y que al menos una de ellas, digamos μ_1 , es absolutamente continua respecto de la medida de Lebesgue. Entonces el baricentro de (μ_i, λ_i) es único.*

Como en capítulos anteriores, la hipótesis de soporte compacto está para poder invocar el Teorema de Brenier tal como lo demostramos; el resultado vale para $\mu_i \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ con una de ellas absolutamente continua, véase [1, Proposition 3.5].

DEMOSTRACIÓN. Sean μ_a y μ_b dos baricentros y supongamos, por el absurdo, que $\mu_a \neq \mu_b$. Sea $m = \min \mathcal{F} = \mathcal{F}(\mu_a) = \mathcal{F}(\mu_b)$ y $\mu_c = \frac{1}{2}(\mu_a + \mu_b)$.

Paso 1: μ_c es un baricentro y hay igualdad en la convexidad. Por el Lema 12.3.1 aplicado a cada $\nu = \mu_i$,

$$\begin{aligned} m &\leq \mathcal{F}(\mu_c) = \sum_i \lambda_i W_2^2(\mu_c, \mu_i) \\ &\leq \sum_i \lambda_i \frac{1}{2} (W_2^2(\mu_a, \mu_i) + W_2^2(\mu_b, \mu_i)) \\ &= \frac{1}{2} (\mathcal{F}(\mu_a) + \mathcal{F}(\mu_b)) = m. \end{aligned}$$

Todas las desigualdades son igualdades y, como los λ_i son positivos, en particular

$$(12.3.1) \quad W_2^2(\mu_c, \mu_1) = \frac{1}{2} (W_2^2(\mu_a, \mu_1) + W_2^2(\mu_b, \mu_1)).$$

Paso 2: la mezcla de los planes óptimos es óptima. Sean $\pi_a \in \Pi(\mu_1, \mu_a)$ y $\pi_b \in \Pi(\mu_1, \mu_b)$ planes óptimos (escribimos μ_1 como primera marginal). Entonces $\pi_c = \frac{1}{2}(\pi_a + \pi_b) \in \Pi(\mu_1, \mu_c)$ tiene costo $\frac{1}{2}(W_2^2(\mu_1, \mu_a) + W_2^2(\mu_1, \mu_b))$, que por (12.3.1) es exactamente $W_2^2(\mu_1, \mu_c)$. Luego π_c es un plan óptimo entre μ_1 y μ_c .

Paso 3: Brenier. Por el Lema 12.2.2, μ_a, μ_b y μ_c tienen soporte compacto (todas las μ_i están concentradas en una bola cerrada). Como además $\mu_1 \ll \mathcal{L}^d$, el Teorema de

Brenier 9.1.3 aplicado al par (μ_1, μ_c) dice que el plan óptimo es único y está inducido por un mapa $T: \pi_c = (\text{id}, T)_\# \mu_1$, y en particular $\pi_c(\Gamma_T) = 1$, donde Γ_T es el gráfico de T .

Paso 4: conclusión. Como $\pi_a \leq 2\pi_c$ (en el sentido de medidas), $\pi_a(\Gamma_T^c) \leq 2\pi_c(\Gamma_T^c) = 0$, es decir, $\pi_a(\Gamma_T) = 1$. Por el Lema 9.1.2, $\pi_a = (\text{id}, T)_\# \mu_1$, y del mismo modo $\pi_b = (\text{id}, T)_\# \mu_1$. Tomando segundas marginales, $\mu_a = T_\# \mu_1 = \mu_b$, lo que contradice la hipótesis. $\square$

OBSERVACIÓN 12.3.3. La demostración muestra dónde interviene la continuidad absoluta: es lo que convierte la igualdad en la convexidad —que sólo dice que los dos planes π_a, π_b se pueden mezclar sin perder optimalidad— en la igualdad de los planes mismos, porque el plan óptimo desde μ_1 es un mapa y no puede dividir masa. Sin ninguna medida absolutamente continua la unicidad puede fallar en dimensión $d \geq 2$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^2$, sean $\mu_1 = \frac{1}{2}(\delta_{(0,0)} + \delta_{(1,1)})$ y $\mu_2 = \frac{1}{2}(\delta_{(1,0)} + \delta_{(0,1)})$ con pesos iguales. Los dos emparejamientos posibles tienen el mismo costo cuadrático, de modo que hay dos planes óptimos inducidos por mapas y, por la Proposición 12.1.3, los puntos medios de las dos geodésicas correspondientes,

$$\frac{1}{2}(\delta_{(1/2,0)} + \delta_{(1/2,1)}) \quad \text{y} \quad \frac{1}{2}(\delta_{(0,1/2)} + \delta_{(1,1/2)}),$$

son ambos baricentros (y, por el Lema 12.3.1, también lo es cualquier mezcla de los dos). En dimensión uno, en cambio, veremos en la Proposición 12.6.1 que el baricentro es siempre único.

12.4. Un criterio de optimalidad

La dualidad de Kantorovich proporciona un certificado sencillo para verificar que una medida dada es un baricentro, análogo al Corolario 9.1.8. Lo usaremos en el caso gaussiano.

PROPOSICIÓN 12.4.1 (Criterio de baricentro). *Sea $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y supongamos que para cada $i = 1, \dots, N$ existe una función convexa $u_i: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^1 , con u_i y su transformada de Legendre $\bar{u}_i$ finitas y de crecimiento a lo sumo cuadrático, tal que $T_i = \nabla u_i$ verifica $(T_i)_\# \mu = \mu_i$. Si*

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i T_i(x) = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^d,$$

entonces μ es un baricentro de (μ_i, λ_i) .

DEMOSTRACIÓN. Fijemos i . Por el Corolario 9.1.8, T_i es el mapa óptimo entre μ y μ_i , y su demostración muestra que el par

$$\varphi_i(x) = |x|^2 - 2u_i(x), \quad \psi_i(y) = |y|^2 - 2\bar{u}_i(y),$$

es admisible para el problema dual con costo $|x - y|^2$ y realiza el valor óptimo,

$$W_2^2(\mu, \mu_i) = \int \varphi_i d\mu + \int \psi_i d\mu_i.$$

Por otra parte, por la dualidad débil (Proposición 4.1.4), para *cualquier* $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$,

$$W_2^2(\nu, \mu_i) \geq \int \varphi_i d\nu + \int \psi_i d\mu_i,$$

donde las integrales son finitas porque, por la hipótesis de crecimiento, $|\varphi_i(x)| \leq C(1 + |x|^2)$ y $|\psi_i(y)| \leq C(1 + |y|^2)$, y las medidas tienen segundo momento finito. Multiplicando por λ_i y sumando,

$$\mathcal{F}(\nu) \geq \int \left(\sum_i \lambda_i \varphi_i \right) d\nu + \sum_i \lambda_i \int \psi_i d\mu_i \quad \text{para toda } \nu,$$

con igualdad para $\nu = \mu$. Ahora bien,

$$\sum_i \lambda_i \varphi_i(x) = |x|^2 - 2 \sum_i \lambda_i u_i(x), \quad \nabla \left(\sum_i \lambda_i u_i \right)(x) = \sum_i \lambda_i T_i(x) = x,$$

de modo que $\sum_i \lambda_i u_i(x) = \frac{1}{2}|x|^2 + c$ para una constante c y $\sum_i \lambda_i \varphi_i \equiv -2c$ es constante. Por lo tanto el miembro derecho de la desigualdad anterior no depende de ν , y vale $\mathcal{F}(\nu) \geq \mathcal{F}(\mu)$ para toda $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$. $\square$

OBSERVACIÓN 12.4.2. La condición $\sum_i \lambda_i T_i = \text{id}$ es la *condición de primer orden* del problema de baricentro, y bajo las hipótesis del Teorema 12.3.2 es también necesaria: si μ es el baricentro y T_i son los mapas de Brenier de μ a μ_i , entonces $\sum \lambda_i T_i = \text{id}$ μ -c.t.p. [1, Proposition 3.8]. No demostraremos la necesidad; para nuestros fines basta la suficiencia, que es lo que permite *verificar* candidatos.

12.5. La formulación multimarginal

En el Capítulo 7 anticipamos que el problema de baricentro está relacionado con un problema de transporte con N marginales. Precisamos ahora esa relación. Escribimos $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in (\mathbb{R}^d)^N$,

$$A(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i x_i, \quad c(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \lambda_i |x_i - A(\mathbf{x})|^2,$$

y denotamos por $\Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)$ al conjunto de medidas de probabilidad en $(\mathbb{R}^d)^N$ con marginales $\mu_1, \dots, \mu_N$. Por la identidad de la varianza (12.1.1), para todo $y \in \mathbb{R}^d$,

$$(12.5.1) \quad \sum_i \lambda_i |x_i - y|^2 = |y - A(\mathbf{x})|^2 + c(\mathbf{x}) \geq c(\mathbf{x}),$$

con igualdad si y sólo si $y = A(\mathbf{x})$: el costo c es la mínima dispersión ponderada de los puntos x_i alrededor de un punto común.

TEOREMA 12.5.1 (Formulación multimarginal). *Con las notaciones anteriores,*

$$\min_{\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)} \mathcal{F}(\mu) = \min_{\gamma \in \Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)} \int_{(\mathbb{R}^d)^N} c d\gamma,$$

y ambos mínimos se alcanzan. Además, si γ^ es óptimo para el problema de la derecha, entonces $A_{\#}\gamma^*$ es un baricentro.*

DEMOSTRACIÓN. Que el mínimo de la izquierda se alcanza es el Teorema 12.2.1. Para el de la derecha, el costo c es continuo y no negativo, y $\Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)$ es no vacío (contiene al producto), ajustado (mismo argumento que el Corolario 2.3.1) y débilmente cerrado (mismo argumento que el Lema 2.3.8), de modo que la demostración del Teorema 2.3.9 se repite sin cambios; dejamos los detalles como ejercicio (Ejercicio 12.3).

Desigualdad $\leq$. Sea $\gamma \in \Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)$ con $\int c d\gamma < \infty$, y sea $\mu = A_{\#}\gamma$. Como $|A(\mathbf{x})|^2 \leq \sum_i \lambda_i |x_i|^2$ por convexidad, $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$. Para cada i , la medida $(\mathbf{p}_i, A)_{\#}\gamma$ pertenece a $\Pi(\mu_i, \mu)$, luego

$$W_2^2(\mu_i, \mu) \leq \int |x_i - A(\mathbf{x})|^2 d\gamma(\mathbf{x}),$$

y sumando con los pesos, $\mathcal{F}(\mu) \leq \int c d\gamma$. Tomando ínfimo en γ , $\min \mathcal{F} \leq \min \int c d\gamma$.

Desigualdad $\geq$. Sea $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y sean $\pi_i \in \Pi(\mu, \mu_i)$ planes óptimos, $i = 1, \dots, N$. Todos tienen a μ como primera marginal, y podemos pegarlos a lo largo de ella: existe $\tilde{\gamma} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d \times (\mathbb{R}^d)^N)$ con $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_i)_{\#}\tilde{\gamma} = \pi_i$ para todo i , donde $\mathbf{p}_0$ es la proyección sobre el primer factor. Esto es la versión con $N + 1$ factores del Lema de pegado A.3.1: se desintegra cada π_i respecto de μ , $\pi_i = \pi_i^y \otimes \mu$, y se define $\tilde{\gamma} = (\bigotimes_i \pi_i^y) \otimes \mu$; la demostración de que esto define una medida con las marginales pedidas es palabra por palabra la del lema, y la dejamos como ejercicio (Ejercicio 12.4). Sea $\gamma = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)_{\#}\tilde{\gamma} \in \Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)$. Por (12.5.1) con $y = x_0$,

$$\int c d\gamma = \int c(x_1, \dots, x_N) d\tilde{\gamma} \leq \int \sum_i \lambda_i |x_i - x_0|^2 d\tilde{\gamma} = \sum_i \lambda_i \int |x_i - x_0|^2 d\pi_i = \mathcal{F}(\mu).$$

Luego $\min \int c d\gamma \leq \mathcal{F}(\mu)$ para toda μ , y tomando mínimo en μ se obtiene la desigualdad.

El baricentro inducido. Si γ^* es óptimo, la desigualdad $\leq$ aplicada a γ^* da $\mathcal{F}(A_{\#}\gamma^*) \leq \int c d\gamma^* = \min \int c d\gamma = \min \mathcal{F}$, luego $A_{\#}\gamma^*$ es un baricentro. $\square$

OBSERVACIÓN 12.5.2. El teorema traduce el problema de baricentro —una minimización no lineal sobre $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ — en un problema de transporte multimarginal, que es un problema *lineal* en γ . Ésa es su virtud teórica: por ejemplo, para medidas discretas el problema multimarginal es un programa lineal, y la dualidad de programación lineal del Capítulo 3 se aplica directamente. Su limitación es práctica: el número de variables crece como el producto de los tamaños de los soportes, lo que lo hace inabordable para N grande. Por eso en el Capítulo 13 calcularemos baricentros de otra manera.

12.6. Dos casos explícitos

12.6.1. Dimensión uno. En la recta, la fórmula $W_2^2(\mu, \nu) = \|F_{\mu}^{[-1]} - F_{\nu}^{[-1]}\|_{L^2(0,1)}^2$ del Ejemplo 10.1.3 convierte el problema de baricentro en un problema de mínimos cuadrados en $L^2(0, 1)$, cuya solución es el promedio.

PROPOSICIÓN 12.6.1 (Baricentro en dimensión uno). *Sean $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Entonces el baricentro de (μ_i, λ_i) es único y es la medida $\bar{\mu}$ cuya pseudoinversa es el*

promedio ponderado de las pseudoinversas:

$$F_{\bar{\mu}}^{[-1]} = \sum_{i=1}^N \lambda_i F_{\mu_i}^{[-1]} \quad \text{en } (0, 1).$$

Equivalentemente, $\bar{\mu} = G_{\#} \mathcal{L}^1|_{(0,1)}$ con $G = \sum_i \lambda_i F_{\mu_i}^{[-1]}$.

DEMOSTRACIÓN. La función G es no decreciente y continua por la izquierda, por serlo cada $F_{\mu_i}^{[-1]}$ (la monotonía es inmediata de la definición de pseudoinversa del Capítulo 8; la continuidad por la izquierda es el Ejercicio 12.5(a)), y $G \in L^2(0, 1)$ porque cada $F_{\mu_i}^{[-1]} \in L^2(0, 1)$ (su norma es el segundo momento de μ_i , por el Ejemplo 10.1.2 y la fórmula de dimensión uno). Sea $\bar{\mu} = G_{\#} \mathcal{L}^1|_{(0,1)}$. Que $F_{\bar{\mu}}^{[-1]} = G$ es una verificación directa a partir de la definición de pseudoinversa y de la monotonía y continuidad por la izquierda de G , que dejamos como ejercicio (Ejercicio 12.5(b)); en particular $\bar{\mu} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

Sea ahora $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ cualquiera y escribamos $H = F_{\mu}^{[-1]}$, $G_i = F_{\mu_i}^{[-1]}$. Por la fórmula de dimensión uno —válida en $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ por [19, Proposition 2.17]— y la identidad de la varianza (12.1.1) aplicada en cada $s \in (0, 1)$ a los puntos $G_i(s)$,

$$\mathcal{F}(\mu) = \int_0^1 \sum_i \lambda_i |H(s) - G_i(s)|^2 ds = \int_0^1 |H(s) - G(s)|^2 ds + \int_0^1 \sum_i \lambda_i |G(s) - G_i(s)|^2 ds.$$

El segundo término no depende de μ , y vale $\mathcal{F}(\bar{\mu})$ (pues para $\mu = \bar{\mu}$ el primer término se anula). Luego $\mathcal{F}(\mu) \geq \mathcal{F}(\bar{\mu})$, con igualdad si y sólo si $H = G$ en $L^2(0, 1)$, es decir, si y sólo si $F_{\mu}^{[-1]} = F_{\bar{\mu}}^{[-1]}$ en casi todo punto, lo cual —por continuidad por la izquierda— fuerza la igualdad en todo $(0, 1)$ y, por la Proposición 8.1.7, $\mu = \bar{\mu}$. $\square$

OBSERVACIÓN 12.6.2. Nótese que en dimensión uno la unicidad vale *sin* ninguna hipótesis de continuidad absoluta, a diferencia del Teorema 12.3.2: la recta es especial porque el problema es lineal en las pseudoinversas. La fórmula dice que el baricentro de Wasserstein promedia *cuantiles*, no densidades: por ejemplo, el baricentro de $\mathcal{N}(m_1, \sigma_1^2)$ y $\mathcal{N}(m_2, \sigma_2^2)$ con pesos iguales es $\mathcal{N}(\frac{m_1+m_2}{2}, (\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2})^2)$, pues $F_{\mathcal{N}(m, \sigma^2)}^{[-1]}(s) = m + \sigma \Phi^{-1}(s)$ con Φ la distribución normal estándar. La mezcla, en cambio, es bimodal si $|m_1 - m_2|$ es grande.

12.6.2. Gaussianas. Para gaussianas en $\mathbb{R}^d$ el baricentro sigue siendo gaussiano, y su matriz de covarianza está caracterizada por una ecuación de punto fijo.

PROPOSICIÓN 12.6.3 (Baricentro de gaussianas). Sean $\mu_i = \mathcal{N}(m_i, \Sigma_i)$ con Σ_i definidas positivas, $i = 1, \dots, N$. Supongamos que Σ es una matriz simétrica definida positiva que satisface

$$(12.6.1) \quad \Sigma = \sum_{i=1}^N \lambda_i (\Sigma^{1/2} \Sigma_i \Sigma^{1/2})^{1/2}.$$

Entonces $\bar{\mu} = \mathcal{N}(\bar{m}, \Sigma)$, con $\bar{m} = \sum_i \lambda_i m_i$, es un baricentro de (μ_i, λ_i) .

La ecuación (12.6.1) tiene una única solución simétrica definida positiva [1, Theorem 6.1]; junto con la unicidad del baricentro (que en este caso no compacto también vale, por el resultado general citado tras el Teorema 12.3.2), esto identifica completamente al baricentro de gaussianas. No demostraremos la existencia y unicidad de la solución de (12.6.1); en la práctica se calcula por la iteración de punto fijo $\Sigma_{k+1} = \sum_i \lambda_i (\Sigma_k^{1/2} \Sigma_i \Sigma_k^{1/2})^{1/2}$, que converge [2].

DEMOSTRACIÓN. Reducción al caso centrado. Por el Lema 10.1.4, para toda $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ con media m_ν y parte centrada $\tilde{\nu}$,

$$\mathcal{F}(\nu) = \sum_i \lambda_i |m_\nu - m_i|^2 + \sum_i \lambda_i W_2^2(\tilde{\nu}, \tilde{\mu}_i).$$

El primer sumando se minimiza en $m_\nu = \bar{m}$ por la identidad de la varianza, y el segundo depende sólo de $\tilde{\nu}$. Basta entonces probar que $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ es un baricentro de las medidas centradas $\tilde{\mu}_i = \mathcal{N}(0, \Sigma_i)$.

Los mapas de Brenier. Sea $\mu = \mathcal{N}(0, \Sigma)$. Por la Observación 9.2.2, el mapa óptimo entre μ y $\tilde{\mu}_i$ es $T_i(x) = A_i x$ con

$$A_i = \Sigma^{-1/2} (\Sigma^{1/2} \Sigma_i \Sigma^{1/2})^{1/2} \Sigma^{-1/2},$$

que es simétrica definida positiva, de modo que $T_i = \nabla u_i$ con $u_i(x) = \frac{1}{2} \langle A_i x, x \rangle$ convexa y C^∞ , y $(T_i)_\# \mu = \tilde{\mu}_i$.

La condición de primer orden. Por (12.6.1),

$$\sum_i \lambda_i A_i = \Sigma^{-1/2} \left(\sum_i \lambda_i (\Sigma^{1/2} \Sigma_i \Sigma^{1/2})^{1/2} \right) \Sigma^{-1/2} = \Sigma^{-1/2} \Sigma \Sigma^{-1/2} = I,$$

es decir, $\sum_i \lambda_i T_i(x) = x$ para todo x . La Proposición 12.4.1 concluye que μ es un baricentro. $\square$

OBSERVACIÓN 12.6.4. En el caso isótropo $\Sigma_i = \sigma_i^2 I$ la ecuación (12.6.1) se resuelve a mano: buscando $\Sigma = \sigma^2 I$, queda $\sigma^2 = \sum_i \lambda_i \sigma_i$, es decir, $\sigma = \sum_i \lambda_i \sigma_i$, en acuerdo con la fórmula unidimensional de la observación anterior. Si todas las Σ_i conmutan entre sí, el mismo cálculo en una base común de autovectores da $\Sigma^{1/2} = \sum_i \lambda_i \Sigma_i^{1/2}$. En general, sin embargo, la solución de (12.6.1) no admite fórmula cerrada, y el baricentro de gaussianas es ya un objeto que hay que calcular numéricamente.

Ejercicios

EJERCICIO 12.1 (Traslaciones y escala). Sean $(\mu_i, \lambda_i)_{i=1}^N$ con $\mu_i \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$.

- Probar que si $T(x) = Ax + b$ es afín con A lineal e invertible y μ tiene media m_μ , entonces $T_\# \mu$ tiene media $Am_\mu + b$.
- Probar que si $\bar{\mu}$ es un baricentro de (μ_i, λ_i) y $v_i \in \mathbb{R}^d$, entonces $\tau_{\bar{v} \#} \bar{\mu}$ con $\bar{v} = \sum \lambda_i v_i$ es un baricentro de $(\tau_{v_i \#} \mu_i, \lambda_i)$, y que $\mathcal{F}$ cambia en $\sum_i \lambda_i |v_i - \bar{v}|^2$.
Sugerencia: Lema 10.1.4.
- Deducir que la media de todo baricentro es $\sum \lambda_i m_{\mu_i}$ y que para calcular baricentros se puede suponer que todas las μ_i están centradas. Probar también que $D_{\lambda \#} \bar{\mu}$ es baricentro de $(D_{\lambda \#} \mu_i, \lambda_i)$ para la dilatación D_λ .

EJERCICIO 12.2 (Dos medidas: el valor mínimo). Sean $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y $t \in (0, 1)$. Probar que

$$\min_{\nu} (1-t)W_2^2(\mu_1, \nu) + tW_2^2(\nu, \mu_2) = t(1-t)W_2^2(\mu_1, \mu_2),$$

y que el mínimo se alcanza en el punto μ_t de la geodésica (Proposición 12.1.3). *Sugerencia:* para la desigualdad $\geq$, escribir $W_2(\mu_1, \mu_2) \leq W_2(\mu_1, \nu) + W_2(\nu, \mu_2)$ y minimizar $(1-t)a^2 + tb^2$ sujeto a $a+b = W_2(\mu_1, \mu_2)$.

EJERCICIO 12.3 (Existencia para el problema multimarginal). Completar la demostración del Teorema 12.5.1: probar que $\Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)$ es no vacío, ajustado y débilmente cerrado en $\mathcal{P}((\mathbb{R}^d)^N)$, y que el funcional $\gamma \mapsto \int c d\gamma$ es semicontinuo inferiormente, de modo que el mínimo se alcanza (repetir el argumento del Teorema 2.3.9).

EJERCICIO 12.4 (Pegado de N planes). Sean $\mu, \mu_1, \dots, \mu_N \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ y $\pi_i \in \Pi(\mu, \mu_i)$. Desintegramos $\pi_i = \pi_i^y \otimes \mu$ (Teorema A.2.1), se define $\tilde{\gamma} = (\bigotimes_{i=1}^N \pi_i^y) \otimes \mu$, es decir

$$\int \Phi d\tilde{\gamma} = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{(\mathbb{R}^d)^N} \Phi(y, x_1, \dots, x_N) d\pi_1^y(x_1) \cdots d\pi_N^y(x_N) \right) d\mu(y).$$

Probar que $\tilde{\gamma}$ es una medida de probabilidad bien definida (medibilidad en y del integrando) y que $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_i)_{\#} \tilde{\gamma} = \pi_i$ para todo i , siguiendo la demostración del Lema A.3.1. Deducir que $\gamma = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)_{\#} \tilde{\gamma} \in \Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)$.

EJERCICIO 12.5 (Detalles de la Proposición 12.6.1). Sea $G = \sum_i \lambda_i F_{\mu_i}^{[-1]}$ con $\mu_i \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

- (a) Probar que cada $F_{\mu_i}^{[-1]}$, y por lo tanto G , es no decreciente y continua por la izquierda en $(0, 1)$ (Ejercicio 8.2).
- (b) Sea $\bar{\mu} = G_{\#} \mathcal{L}^1|_{(0,1)}$. Probar que $F_{\bar{\mu}}^{[-1]} = G$ y que $\bar{\mu} \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.
- (c) Deducir que el baricentro de N gaussianas unidimensionales $N(m_i, \sigma_i^2)$ es la gaussiana $N(\sum \lambda_i m_i, (\sum \lambda_i \sigma_i^2)^2)$, y que el baricentro de N medidas uniformes en intervalos es uniforme en un intervalo.

EJERCICIO 12.6 (Gaussianas con covarianzas que conmutan). Sean $\mu_i = N(0, \Sigma_i)$ con Σ_i definidas positivas que conmutan dos a dos (por ejemplo, todas diagonales).

- (a) Probar que $\bar{\Sigma} = (\sum_i \lambda_i \Sigma_i^{1/2})^2$ resuelve la ecuación de punto fijo (12.6.1).
- (b) Verificar directamente el criterio de la Proposición 12.4.1: los mapas $T_i(x) = \Sigma_i^{1/2} \bar{\Sigma}^{-1/2} x$ son gradientes de funciones convexas, transportan $N(0, \bar{\Sigma})$ en μ_i y satisfacen $\sum \lambda_i T_i = \text{id}$.
- (c) Comparar con el Ejercicio 12.5(c): el caso unidimensional es el caso $d = 1$ de este ejercicio.

EJERCICIO 12.7 (El criterio multimarginal). Sea $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ en las hipótesis de la Proposición 12.4.1: $T_i = \nabla u_i$ con $(T_i)_{\#} \mu = \mu_i$ y $\sum_i \lambda_i T_i = \text{id}$. Sea $\gamma = (T_1, \dots, T_N)_{\#} \mu \in \mathcal{P}((\mathbb{R}^d)^N)$.

- (a) Probar que $\gamma \in \Pi(\mu_1, \dots, \mu_N)$ y que $A_{\#} \gamma = \mu$, donde $A(x_1, \dots, x_N) = \sum \lambda_i x_i$.
- (b) Probar que $\int c d\gamma = \mathcal{F}(\mu)$ para el costo c de (12.5.1), y deducir del Teorema 12.5.1 que γ es un plan multimarginal óptimo.
- (c) Comparar con el Ejercicio 7.4: allí el plan óptimo estaba concentrado en un hiperplano $\{\sum x_i = v\}$; aquí, en el gráfico de $x \mapsto (T_1(x), \dots, T_N(x))$.

- EJERCICIO 12.8 (Cuantización y baricentros de Diracs). (a) Probar directamente (sin usar el Teorema 12.3.2) que el baricentro de masas de Dirac δ_{x_i} es único y es $\bar{x}$, $\bar{x} = \sum \lambda_i x_i$.
- (b) Sea $\mu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ y $\nu = \sum_{k=1}^N b_k \delta_{y_k}$. Probar que $W_2^2(\mu, \nu) \geq \sum_k b_k \text{Var}(\mu|_k)$ donde $\mu|_k$ es la restricción normalizada de μ a la celda que el plan óptimo envía a y_k , con igualdad si y sólo si cada y_k es el baricentro de su celda. Deducir la condición de optimalidad del Ejercicio 10.9(c).

EJERCICIO 12.9 ($W_2^2(\mu, \cdot)$ no es convexo a lo largo de geodésicas). Sean $\mu = \frac{1}{2}(\delta_{(-1,0)} + \delta_{(1,0)})$, $\nu_0 = \frac{1}{2}(\delta_{(-1,1)} + \delta_{(1,-1)})$ y $\nu_1 = \frac{1}{2}(\delta_{(1,1)} + \delta_{(-1,-1)})$ en $\mathbb{R}^2$.

- (a) Probar que $\nu_t = \frac{1}{2}(\delta_{(-1+2t,1)} + \delta_{(1-2t,-1)})$ es una geodésica de W_2 entre ν_0 y ν_1 (¿es la única?).
- (b) Calcular $W_2^2(\mu, \nu_t) = 1 + 4 \min\{t^2, (1-t)^2\}$ y concluir que $t \mapsto W_2^2(\mu, \nu_t)$ no es convexa: vale 1 en los extremos y 2 en $t = \frac{1}{2}$.
- (c) Comparar con el Lema 12.3.1 (convexidad a lo largo de interpolaciones lineales) y con el Ejercicio 10.11. Este ejemplo muestra que la unicidad del baricentro no puede probarse por un argumento de convexidad geodésica.

Ejercicios computacionales. Los ejercicios siguientes se resuelven con el cuaderno *Baricentros de Wasserstein* (véase el Apéndice E); los enunciados figuran también al final del cuaderno. Las referencias a secciones son a las del cuaderno.

EJERCICIO 12.10 (Rigidez en dimensión uno). Para N medidas empíricas en $\mathbb{R}$ con n átomos cada una, mostrar que el plan multimarginal óptimo del Teorema 12.5.1 es el comonótono (empareja los k -ésimos datos ordenados de cada medida) y que $B_{\#}\gamma^*$ es exactamente el promedio de cuantiles de la Proposición 12.6.1. Verificarlo resolviendo el programa lineal multimarginal para n chico.

EJERCICIO 12.11 (Traslaciones). Probar que si se traslada cada μ_i por un vector v_i , el baricentro se traslada por $\bar{v} = \sum_i \lambda_i v_i$ y el valor mínimo de $\mathcal{F}$ cambia en $\sum_i \lambda_i |v_i - \bar{v}|^2$ (cf. Ejercicio 12.1). Deducir que para calcular baricentros basta centrar todas las medidas, y verificarlo numéricamente.

EJERCICIO 12.12 (Convexidad del funcional). Elegir dos medidas ν_0, ν_1 (por ejemplo, dos de las gaussianas de la Sección 3 del cuaderno) y graficar $s \mapsto \mathcal{F}((1-s)\nu_0 + s\nu_1)$ y $s \mapsto \mathcal{F}(\nu_s)$, donde ν_s es la geodésica de W_2 entre ellas. La primera es convexa por el Lema 12.3.1. ¿Lo es la segunda? Comparar con el Ejercicio 12.9.

EJERCICIO 12.13 (Baricentros de formas). Discretizar dos o tres figuras planas (un disco, un cuadrado, un triángulo) como medidas uniformes sobre una grilla y calcular su baricentro resolviendo el programa lineal del Teorema 12.5.1 (`ot.lp.barycenter`). Observar cómo crece el tamaño del problema con la grilla; en el Capítulo 13 se ve la versión entrópica, que escala mucho mejor.

Transporte entrópico y el algoritmo de Sinkhorn

Los capítulos anteriores han sido, casi por completo, teoría de existencia. Este último capítulo trata del cálculo: dadas dos medidas discretas, ¿cómo se calcula efectivamente un plan óptimo, o al menos el costo óptimo? Vimos en el Capítulo 3 que el problema discreto es un programa lineal, y por lo tanto puede resolverse con los algoritmos generales de la programación lineal. Pero esos algoritmos tienen un costo que crece rápidamente con el tamaño de los soportes —para soportes de n puntos hay n^2 variables—, y en las aplicaciones actuales n es del orden de 10^4 o más.

La idea que cambió el panorama computacional del transporte óptimo, propuesta por Cuturi [8] a partir de trabajos mucho más antiguos de Schrödinger y de Sinkhorn, consiste en *regularizar* el problema agregando un término entrópico. El problema regularizado tiene una solución única de forma explícita —exponencial en los potenciales duales—, y sus condiciones de optimalidad se resuelven por un algoritmo de punto fijo de una simplicidad extraordinaria: alternar dos normalizaciones de una matriz. El precio es que se resuelve un problema aproximado; pero la aproximación mejora cuando el parámetro de regularización tiende a cero, y en ese límite se recupera exactamente la teoría de los Capítulos 3 y 5.

Trabajaremos en el caso discreto, que es el que se computa, y seguiremos en buena medida el libro de Peyré y Cuturi [17]. El capítulo cierra con el cálculo de baricentros de Wasserstein, que conecta con el Capítulo 12.

13.1. El problema entrópico

Marco discreto. Fijamos puntos $x_1, \dots, x_n \in X$ e $y_1, \dots, y_m \in Y$, pesos $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ con

$$a_i > 0, \quad b_j > 0, \quad \sum_i a_i = \sum_j b_j = 1,$$

y una matriz de costos $C = (c_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $c_{ij} = c(x_i, y_j)$. Como en el Capítulo 5, identificamos las medidas $\mu = \sum_i a_i \delta_{x_i}$, $\nu = \sum_j b_j \delta_{y_j}$ con los vectores a, b y los planes de transporte con matrices:

$$\Pi(a, b) = \left\{ \pi \in \mathbb{R}^{n \times m} : \pi_{ij} \geq 0, \sum_j \pi_{ij} = a_i, \sum_i \pi_{ij} = b_j \right\}.$$

Escribimos $\langle C, \pi \rangle = \sum_{ij} c_{ij} \pi_{ij}$ para el costo de un plan, de modo que el problema de Kantorovich es

$$\text{OT}(a, b) = \min_{\pi \in \Pi(a, b)} \langle C, \pi \rangle.$$

La hipótesis $a_i, b_j > 0$ no quita generalidad —los puntos con peso nulo se descartan— y evita casos degenerados en todo lo que sigue.

Entropía relativa.

DEFINICIÓN 13.1.1 (Entropía relativa). Sea $\pi \in \Pi(a, b)$. La *entropía relativa* (o *divergencia de Kullback–Leibler*) de π respecto del plan producto $a \otimes b$, $(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j$, es

$$\text{KL}(\pi | a \otimes b) = \sum_{i,j} \pi_{ij} \log \frac{\pi_{ij}}{a_i b_j},$$

con la convención $0 \log 0 = 0$.

LEMA 13.1.2. La función $\pi \mapsto \text{KL}(\pi | a \otimes b)$ es continua en $\Pi(a, b)$, estrictamente convexa, no negativa, y se anula únicamente en $\pi = a \otimes b$.

DEMOSTRACIÓN. Escribiendo $\text{KL}(\pi | a \otimes b) = \sum_{i,j} a_i b_j h(\pi_{ij}/(a_i b_j))$ con $h(s) = s \log s$, la continuidad y la estricta convexidad se heredan de h , que es continua en $[0, \infty)$ y estrictamente convexa por tener $h''(s) = 1/s > 0$. Para la no negatividad usamos la desigualdad de Jensen para la función convexa h y la medida de probabilidad $a \otimes b$:

$$\sum_{i,j} a_i b_j h\left(\frac{\pi_{ij}}{a_i b_j}\right) \geq h\left(\sum_{i,j} a_i b_j \frac{\pi_{ij}}{a_i b_j}\right) = h(1) = 0,$$

con igualdad, por la estricta convexidad, si y sólo si $\pi_{ij}/(a_i b_j)$ es constante, y esa constante debe ser 1 porque ambas son medidas de probabilidad. $\square$

DEFINICIÓN 13.1.3 (Problema entrópico). Para $\varepsilon > 0$, el *problema de transporte entrópico* es

$$\text{OT}_\varepsilon(a, b) = \min_{\pi \in \Pi(a, b)} \left\{ \langle C, \pi \rangle + \varepsilon \text{KL}(\pi | a \otimes b) \right\}.$$

PROPOSICIÓN 13.1.4 (Existencia y unicidad). Para todo $\varepsilon > 0$ el problema entrópico tiene un único minimizador $\pi^\varepsilon \in \Pi(a, b)$, y todas sus entradas son estrictamente positivas.

DEMOSTRACIÓN. El conjunto $\Pi(a, b)$ es un politopo compacto y no vacío (contiene a $a \otimes b$), y el funcional es continuo (Lema 13.1.2), luego alcanza su mínimo. Es además estrictamente convexo, por ser suma de la función lineal $\pi \mapsto \langle C, \pi \rangle$ y de ε veces una función estrictamente convexa, y un funcional estrictamente convexo en un conjunto convexo tiene a lo sumo un minimizador.

Para la positividad, supongamos que $\pi_{i_0 j_0}^\varepsilon = 0$ para algún par (i_0, j_0) , y consideremos $\pi_t = (1 - t)\pi^\varepsilon + t(a \otimes b) \in \Pi(a, b)$ para $t \in (0, 1)$. La función $t \mapsto \langle C, \pi_t \rangle$ es afín, y la derivada de $t \mapsto \text{KL}(\pi_t | a \otimes b)$ en $t = 0^+$ es

$$\sum_{i,j} (a_i b_j - \pi_{ij}^\varepsilon) \left(1 + \log \frac{\pi_{ij}^\varepsilon}{a_i b_j} \right),$$

que vale $-\infty$ porque el término (i_0, j_0) es $a_{i_0} b_{j_0} (1 + \log 0) = -\infty$ y los demás son finitos. Luego el funcional decrece estrictamente al moverse de π^ε hacia $a \otimes b$ para t pequeño, contradiciendo la minimalidad. $\square$

Comparemos con el problema sin regularizar. El mínimo de un funcional lineal sobre un politopo se alcanza en un vértice, y los vértices de $\Pi(a, b)$ son planes muy dispersos (con a lo sumo $n + m - 1$ entradas no nulas; para $n = m$ y pesos uniformes, matrices de

permutación, por el teorema de Birkhoff del Capítulo 1). El plan entrópico, en cambio, tiene todas las entradas positivas: la entropía «reparte» la masa. Cuanto menor es ε , menos reparte, y en el límite recupera un vértice; ese es el contenido de la Sección 13.4.

13.2. Dualidad entrópica

La forma explícita del plan entrópico se obtiene, como en los Capítulos 3 y 6, introduciendo multiplicadores para las dos restricciones de marginales.

TEOREMA 13.2.1 (Forma del plan entrópico y dualidad). *Sea $\varepsilon > 0$.*

1. *Existen vectores $\varphi^\varepsilon \in \mathbb{R}^n$ y $\psi^\varepsilon \in \mathbb{R}^m$, únicos salvo la transformación $(\varphi^\varepsilon + s, \psi^\varepsilon - s)$ con $s \in \mathbb{R}$, tales que el plan entrópico es*

$$(13.2.1) \quad \pi_{ij}^\varepsilon = a_i b_j \exp\left(\frac{\varphi_i^\varepsilon + \psi_j^\varepsilon - c_{ij}}{\varepsilon}\right), \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

2. *Definiendo el funcional dual entrópico*

$$(13.2.2) \quad \mathcal{D}_\varepsilon(\varphi, \psi) = \sum_i a_i \varphi_i + \sum_j b_j \psi_j - \varepsilon \sum_{i,j} a_i b_j \exp\left(\frac{\varphi_i + \psi_j - c_{ij}}{\varepsilon}\right) + \varepsilon,$$

se tiene la dualidad fuerte

$$\text{OT}_\varepsilon(a, b) = \max_{(\varphi, \psi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \mathcal{D}_\varepsilon(\varphi, \psi),$$

y el máximo se alcanza exactamente en los pares $(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ del ítem 1.

Los vectores $\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon$ se llaman *potenciales entrópicos*. Antes de la demostración, observemos que (13.2.1) es exactamente la situación de la Proposición A.2.4: el plan entrópico tiene densidad $\exp((\varphi_i^\varepsilon + \psi_j^\varepsilon - c_{ij})/\varepsilon)$ respecto del producto $a \otimes b$. Notemos también que en (13.2.2) no hay ninguna restricción sobre (φ, ψ) : la desigualdad $\varphi_i + \psi_j \leq c_{ij}$ del dual de Kantorovich ha sido reemplazada por una *penalización* exponencial que castiga suavemente su violación.

DEMOSTRACIÓN. **Paso 1: condiciones de primer orden.** Sea π^ε el minimizador, que tiene todas sus entradas positivas (Proposición 13.1.4), de modo que el funcional $G(\pi) = \langle C, \pi \rangle + \varepsilon \text{KL}(\pi | a \otimes b)$ es diferenciable en un entorno de π^ε , con

$$\frac{\partial G}{\partial \pi_{ij}}(\pi) = c_{ij} + \varepsilon \left(1 + \log \frac{\pi_{ij}}{a_i b_j}\right).$$

Las restricciones de marginales son lineales e independientes salvo por una relación (la suma de todas las filas y la de todas las columnas dan ambas 1), y π^ε es un punto interior del ortante. Por el teorema de los multiplicadores de Lagrange, existen $\alpha \in \mathbb{R}^n$ y $\beta \in \mathbb{R}^m$ tales que

$$c_{ij} + \varepsilon \left(1 + \log \frac{\pi_{ij}^\varepsilon}{a_i b_j}\right) = \alpha_i + \beta_j \quad \text{para todo } i, j,$$

es decir, $\pi_{ij}^\varepsilon = a_i b_j \exp((\alpha_i + \beta_j - \varepsilon - c_{ij})/\varepsilon)$. Poniendo $\varphi_i^\varepsilon = \alpha_i - \varepsilon$ y $\psi_j^\varepsilon = \beta_j$ obtenemos (13.2.1).

Paso 2: verificación directa y dualidad débil. El argumento anterior es la manera de *descubrir* la forma del plan; para que la demostración no dependa del

teorema de Lagrange, verificamos ahora directamente que si (φ, ψ) es un par cualquiera y $\pi \in \Pi(a, b)$ es cualquier plan, entonces

$$(13.2.3) \quad \mathcal{D}_\varepsilon(\varphi, \psi) \leq \langle C, \pi \rangle + \varepsilon \text{KL}(\pi \mid a \otimes b),$$

con igualdad si y sólo si $\pi_{ij} = a_i b_j \exp((\varphi_i + \psi_j - c_{ij})/\varepsilon)$ para todo i, j . En efecto, escribamos $\theta_{ij} = a_i b_j \exp((\varphi_i + \psi_j - c_{ij})/\varepsilon) > 0$. Usando que π tiene marginales a y b ,

$$\sum_i a_i \varphi_i + \sum_j b_j \psi_j = \sum_{ij} \pi_{ij} (\varphi_i + \psi_j) = \sum_{ij} \pi_{ij} \left(c_{ij} + \varepsilon \log \frac{\theta_{ij}}{a_i b_j} \right),$$

de modo que

$$\langle C, \pi \rangle + \varepsilon \text{KL}(\pi \mid a \otimes b) - \mathcal{D}_\varepsilon(\varphi, \psi) = \varepsilon \sum_{ij} \left(\pi_{ij} \log \frac{\pi_{ij}}{\theta_{ij}} - \pi_{ij} + \theta_{ij} \right).$$

Cada sumando es no negativo, pues $s \log(s/\theta) - s + \theta \geq 0$ para $s \geq 0$, $\theta > 0$, con igualdad sólo si $s = \theta$ (es la desigualdad $\log r \leq r - 1$ con $r = \theta/s$, o la convexidad de $s \log s$). Esto prueba (13.2.3) y la caracterización de la igualdad.

Paso 3: dualidad fuerte. Por el Paso 1, el par $(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ y el plan π^ε satisfacen la condición de igualdad del Paso 2, luego $\mathcal{D}_\varepsilon(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon) = \text{OT}_\varepsilon(a, b)$. Por (13.2.3) con $\pi = \pi^\varepsilon$, todo otro par (φ, ψ) satisface $\mathcal{D}_\varepsilon(\varphi, \psi) \leq \text{OT}_\varepsilon(a, b)$. Esto prueba la dualidad fuerte y que $(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ realiza el máximo.

Paso 4: unicidad salvo constantes. Si (φ, ψ) realiza el máximo, entonces vale la igualdad en (13.2.3) con $\pi = \pi^\varepsilon$, luego $\pi_{ij}^\varepsilon = a_i b_j \exp((\varphi_i + \psi_j - c_{ij})/\varepsilon)$ para todo i, j , es decir, $\varphi_i + \psi_j = \varphi_i^\varepsilon + \psi_j^\varepsilon$ para todo i, j . Restando la identidad para (i, j) y para (i_0, j) se obtiene $\varphi_i - \varphi_i^\varepsilon = \varphi_{i_0} - \varphi_{i_0}^\varepsilon =: s$ para todo i , y entonces $\psi_j - \psi_j^\varepsilon = -s$ para todo j . $\square$

OBSERVACIÓN 13.2.2 (La notación de Peyré–Cuturi). En la literatura computacional es habitual escribir el plan entrópico como

$$\pi^\varepsilon = \text{diag}(u^\varepsilon) K^\varepsilon \text{diag}(v^\varepsilon), \quad K_{ij}^\varepsilon = e^{-c_{ij}/\varepsilon}, \quad u_i^\varepsilon = a_i e^{\varphi_i^\varepsilon/\varepsilon}, \quad v_j^\varepsilon = b_j e^{\psi_j^\varepsilon/\varepsilon},$$

que es (13.2.1) escrita matricialmente: el plan es la matriz K^ε —el *núcleo de Gibbs* del costo— reescalada por filas y por columnas. Los vectores $u^\varepsilon, v^\varepsilon$ se llaman *escalamientos*. Peyré y Cuturi [17] usan el regularizador $-\varepsilon H(\pi)$ con $H(\pi) = -\sum \pi_{ij} (\log \pi_{ij} - 1)$ en lugar de $\varepsilon \text{KL}(\pi \mid a \otimes b)$; ambos difieren en una función afín de π que es constante sobre $\Pi(a, b)$ (pues $\sum \pi_{ij} \log(a_i b_j) = \sum a_i \log a_i + \sum b_j \log b_j$ para todo plan), de modo que tienen el mismo minimizador π^ε y los mismos escalamientos, salvo por los factores a_i, b_j que en su convención se absorben en u, v .

La lectura vía la c -transformada. Reordenemos las condiciones de optimalidad de una manera que las conecte con el Capítulo 6. La condición de marginal $\sum_j \pi_{ij}^\varepsilon = a_i$ se lee, usando (13.2.1) y dividiendo por $a_i > 0$,

$$e^{\varphi_i^\varepsilon/\varepsilon} \sum_j b_j e^{(\psi_j^\varepsilon - c_{ij})/\varepsilon} = 1, \quad \text{es decir,} \quad \varphi_i^\varepsilon = -\varepsilon \log \sum_j b_j e^{(\psi_j^\varepsilon - c_{ij})/\varepsilon}.$$

Análogamente, la condición sobre las columnas da $\psi_j^\varepsilon = -\varepsilon \log \sum_i a_i e^{(\varphi_i^\varepsilon - c_{ij})/\varepsilon}$. Esto motiva la siguiente definición.

DEFINICIÓN 13.2.3 (*c*-transformada suavizada). Para $\varepsilon > 0$ y $\varphi \in \mathbb{R}^n$, $\psi \in \mathbb{R}^m$, definimos

$$(\varphi)_j^{c,\varepsilon} = -\varepsilon \log \sum_{i=1}^n a_i e^{(\varphi_i - c_{ij})/\varepsilon}, \quad (\psi)_i^{\bar{c},\varepsilon} = -\varepsilon \log \sum_{j=1}^m b_j e^{(\psi_j - c_{ij})/\varepsilon}.$$

Con esta notación, las condiciones de optimalidad dicen que los potenciales entrópicos son *c*-transformadas suavizadas uno del otro:

$$(13.2.4) \quad \psi^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon)^{c,\varepsilon}, \quad \varphi^\varepsilon = (\psi^\varepsilon)^{\bar{c},\varepsilon},$$

exactamente como los potenciales de Kantorovich satisfacen $\psi = \varphi^c$, $\varphi = \psi^{\bar{c}}$ (Capítulo 6). El nombre se justifica por el siguiente lema.

LEMA 13.2.4 (El límite del *soft-min*). Para todo $\varphi \in \mathbb{R}^n$ y todo j ,

$$\min_i \{c_{ij} - \varphi_i\} - \varepsilon \log \frac{1}{\min_i a_i} \leq (\varphi)_j^{c,\varepsilon} \leq \min_i \{c_{ij} - \varphi_i\},$$

y en particular $(\varphi)_j^{c,\varepsilon} \rightarrow \varphi_j^c = \min_i \{c_{ij} - \varphi_i\}$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, uniformemente en φ . Lo mismo vale para la $\bar{c}$ -transformada suavizada.

DEMOSTRACIÓN. Sea $M_j = \min_i \{c_{ij} - \varphi_i\}$. Cada término de la suma satisface $e^{(\varphi_i - c_{ij})/\varepsilon} \leq e^{-M_j/\varepsilon}$, y el término que realiza el mínimo vale exactamente $e^{-M_j/\varepsilon}$. Luego

$$(\min_i a_i) e^{-M_j/\varepsilon} \leq \sum_i a_i e^{(\varphi_i - c_{ij})/\varepsilon} \leq e^{-M_j/\varepsilon} \sum_i a_i = e^{-M_j/\varepsilon},$$

y tomando $-\varepsilon \log$ (que invierte las desigualdades) se obtienen las dos cotas. Como las cotas encierran a $(\varphi)_j^{c,\varepsilon}$ en un intervalo de longitud $\varepsilon \log(1/\min_i a_i)$ alrededor de M_j , la convergencia es uniforme. $\square$

La operación $-\varepsilon \log \sum a_i e^{-z_i/\varepsilon}$ es un *mínimo suavizado* (*soft-min*) de los números $z_i = c_{ij} - \varphi_i$: para ε grande promedia, para ε pequeño selecciona el menor. Así, la iteración (13.2.4) es la versión suavizada de la mejora de potenciales $\varphi \mapsto \varphi^c$ de la Proposición 6.1.5, y el funcional dual entrópico (13.2.2) es la versión suavizada del dual de programación lineal del Capítulo 3: en la Sección 13.4 veremos que cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ una cosa converge a la otra.

13.3. El algoritmo de Sinkhorn

Las relaciones (13.2.4) sugieren inmediatamente un algoritmo: partir de un ψ arbitrario y alternar

$$(13.3.1) \quad \varphi^{(k+1)} = (\psi^{(k)})^{\bar{c},\varepsilon}, \quad \psi^{(k+1)} = (\varphi^{(k+1)})^{c,\varepsilon}.$$

En la notación de la Observación 13.2.2, con $u = a e^{\varphi/\varepsilon}$, $v = b e^{\psi/\varepsilon}$ (productos entrada a entrada), las mismas relaciones se escriben

$$(13.3.2) \quad u^{(k+1)} = \frac{a}{K^\varepsilon v^{(k)}}, \quad v^{(k+1)} = \frac{b}{(K^\varepsilon)^T u^{(k+1)}},$$

con divisiones entrada a entrada. Éste es el *algoritmo de Sinkhorn*: cada paso normaliza las filas de la matriz $\text{diag}(u) K^\varepsilon \text{diag}(v)$ para que sumen a , o sus columnas para que

sumen b . Cada iteración cuesta dos productos matriz-vector, y no requiere resolver ningún sistema lineal ni programa lineal.

Hay dos maneras de entender por qué converge. La primera es que (13.3.1) es la *maximización alternada* del funcional dual $\mathcal{D}_\varepsilon$: fijado ψ , el máximo de $\varphi \mapsto \mathcal{D}_\varepsilon(\varphi, \psi)$ se alcanza exactamente en $\varphi = (\psi)^{\bar{c}, \varepsilon}$, y viceversa.

LEMA 13.3.1. *Para $\psi \in \mathbb{R}^m$ fijo, la función $\varphi \mapsto \mathcal{D}_\varepsilon(\varphi, \psi)$ es estrictamente cóncava en $\mathbb{R}^n$ y su único maximizador es $\varphi = (\psi)^{\bar{c}, \varepsilon}$. Análogamente, para φ fijo, $\psi \mapsto \mathcal{D}_\varepsilon(\varphi, \psi)$ tiene único maximizador $\psi = (\varphi)^{c, \varepsilon}$.*

DEMOSTRACIÓN. Escribamos $S_i = \sum_j b_j e^{(\psi_j - c_{ij})/\varepsilon} > 0$. Como función de φ_i , $\mathcal{D}_\varepsilon$ es

$$a_i \varphi_i - \varepsilon a_i S_i e^{\varphi_i/\varepsilon} + (\text{términos que no dependen de } \varphi_i),$$

que es estrictamente cóncava (su segunda derivada es $-\frac{a_i S_i}{\varepsilon} e^{\varphi_i/\varepsilon} < 0$), y las variables $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ están separadas. La derivada respecto de φ_i se anula si y sólo si $S_i e^{\varphi_i/\varepsilon} = 1$, es decir $\varphi_i = -\varepsilon \log S_i$, que es la definición de $(\psi)_i^{\bar{c}, \varepsilon}$. $\square$

En consecuencia, $\mathcal{D}_\varepsilon(\varphi^{(k)}, \psi^{(k)})$ es no decreciente en k , y acotado por $\text{OT}_\varepsilon(a, b)$ (Teorema 13.2.1). Eso garantiza la convergencia de los *valores* del dual; para la convergencia de los *iterados* necesitamos un poco más, y ésa es la segunda manera de entender el algoritmo: como una iteración de punto fijo con un único punto fijo.

TEOREMA 13.3.2 (Convergencia del algoritmo de Sinkhorn). *Sea $\psi^{(0)} \in \mathbb{R}^m$ arbitrario y sean $(\varphi^{(k)}, \psi^{(k)})$ los iterados de (13.3.1). Sea $\pi^{(k)}$ el plan*

$$\pi_{ij}^{(k)} = a_i b_j \exp\left(\frac{\varphi_i^{(k)} + \psi_j^{(k)} - c_{ij}}{\varepsilon}\right).$$

Entonces $\pi^{(k)} \rightarrow \pi^\varepsilon$ cuando $k \rightarrow \infty$, y existe una sucesión de constantes $s_k \in \mathbb{R}$ tal que $(\varphi^{(k)} + s_k, \psi^{(k)} - s_k) \rightarrow (\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ para una elección adecuada de la constante de normalización de los potenciales entrópicos.

DEMOSTRACIÓN. **Paso 1: normalización.** El funcional $\mathcal{D}_\varepsilon$ y el plan $\pi^{(k)}$ son invariantes por $(\varphi, \psi) \mapsto (\varphi + s, \psi - s)$, y la iteración (13.3.1) conmuta con esa transformación (si se reemplaza $\psi^{(k)}$ por $\psi^{(k)} - s$, se obtiene $\varphi^{(k+1)} + s$ y $\psi^{(k+1)} - s$). Podemos entonces normalizar los iterados imponiendo, por ejemplo, $\varphi_1^{(k)} = 0$ para todo $k \geq 1$, sin cambiar los planes $\pi^{(k)}$ ni los valores del dual. Normalizamos del mismo modo los potenciales entrópicos: $\varphi_1^\varepsilon = 0$, lo cual los determina unívocamente (Teorema 13.2.1, ítem 1).

Paso 2: los iterados están acotados. Para $k \geq 1$ el plan $\pi^{(k)}$ tiene columnas correctas: $\sum_i \pi_{ij}^{(k)} = b_j$, porque $\psi^{(k)} = (\varphi^{(k)})^{c, \varepsilon}$ es exactamente la normalización por columnas. En particular $\pi_{ij}^{(k)} \leq b_j \leq 1$ para todo i, j , es decir,

$$\varphi_i^{(k)} + \psi_j^{(k)} \leq c_{ij} + \varepsilon \log \frac{1}{a_i b_j} =: M \quad \text{para todo } i, j,$$

donde M no depende de k . Por otra parte, de la definición de la c -transformada suavizada y el Lema 13.2.4, $\psi_j^{(k)} \geq \min_i \{c_{ij} - \varphi_i^{(k)}\} - \varepsilon \log \frac{1}{\min_i a_i}$ y análogamente $\varphi_i^{(k)} \geq \min_j \{c_{ij} - \psi_j^{(k-1)}\} - \varepsilon \log \frac{1}{\min_j b_j}$. Combinando estas cotas con la normalización

$\varphi_1^{(k)} = 0$: de la cota superior con $i = 1$, $\psi_j^{(k)} \leq M - c_{1j}$ para todo j ; luego de la cota inferior de $\varphi^{(k+1)}$, $\varphi_i^{(k+1)} \geq \min_j \{c_{ij} - M + c_{1j}\} - \varepsilon \log \frac{1}{\min b_j}$; y de la cota superior con ese φ acotado inferiormente, los ψ quedan acotados inferiormente también, y de la cota inferior de ψ los φ quedan acotados superiormente. En resumen, existe $R > 0$, independiente de k , con $|\varphi_i^{(k)}|, |\psi_j^{(k)}| \leq R$ para todo i, j y todo $k \geq 2$.

Paso 3: todo punto límite es el óptimo. Sea $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ un punto límite de la sucesión acotada $(\varphi^{(k)}, \psi^{(k)})$, a lo largo de una subsucesión k_ℓ . La sucesión $d_k = \mathcal{D}_\varepsilon(\varphi^{(k)}, \psi^{(k)})$ es no decreciente (Lema 13.3.1) y acotada, luego converge a un valor d^* . Por continuidad de $\mathcal{D}_\varepsilon$ y de las c -transformadas suavizadas,

$$\mathcal{D}_\varepsilon(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = d^* = \lim_{\ell} \mathcal{D}_\varepsilon(\varphi^{(k_\ell+1)}, \psi^{(k_\ell)}) = \mathcal{D}_\varepsilon((\bar{\psi})^{\bar{c}, \varepsilon}, \bar{\psi}),$$

donde usamos que $d_k \leq \mathcal{D}_\varepsilon(\varphi^{(k+1)}, \psi^{(k)}) \leq d_{k+1}$ —ambos pasos intermedios de la iteración no disminuyen el dual— y que $\varphi^{(k_\ell+1)} = (\psi^{(k_\ell)})^{\bar{c}, \varepsilon} \rightarrow (\bar{\psi})^{\bar{c}, \varepsilon}$. Por la unicidad del maximizador en el Lema 13.3.1, $\bar{\varphi} = (\bar{\psi})^{\bar{c}, \varepsilon}$. Del mismo modo, $\bar{\psi} = (\bar{\varphi})^{c, \varepsilon}$. Es decir, $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ satisface (13.2.4), de modo que el plan $\bar{\pi}_{ij} = a_i b_j e^{(\bar{\varphi}_i + \bar{\psi}_j - c_{ij})/\varepsilon}$ pertenece a $\Pi(a, b)$ y, por el Paso 2 de la demostración del Teorema 13.2.1, realiza la igualdad en (13.2.3): es el plan entrópico, $\bar{\pi} = \pi^\varepsilon$, y $(\bar{\varphi}, \bar{\psi})$ es un par de potenciales entrópicos. Con la normalización $\bar{\varphi}_1 = 0$ (que se preserva en el límite), la unicidad del ítem 1 del Teorema 13.2.1 da $(\bar{\varphi}, \bar{\psi}) = (\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$.

Paso 4: conclusión. Una sucesión acotada en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ cuyos puntos límite se reducen a uno solo converge a ese punto. Luego $(\varphi^{(k)}, \psi^{(k)}) \rightarrow (\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$, y por continuidad $\pi^{(k)} \rightarrow \pi^\varepsilon$. $\square$

OBSERVACIÓN 13.3.3 (Tasa de convergencia). El teorema anterior no dice nada sobre la *velocidad* de convergencia. Se sabe que es lineal: existe $\kappa \in (0, 1)$ tal que la distancia entre $(\varphi^{(k)}, \psi^{(k)})$ y el óptimo, medida en una métrica adecuada, decrece como κ^k . La demostración clásica, debida a Franklin y Lorenz [11], muestra que la aplicación $v \mapsto b / ((K^\varepsilon)^T(a/K^\varepsilon v))$ es una contracción para la *métrica proyectiva de Hilbert* en el cono de vectores positivos, con constante $\kappa = \tanh(\Delta/4)$, donde $\Delta = \log \max_{ijkl} \frac{K_{ik} K_{jl}}{K_{jk} K_{il}}$. Como Δ es del orden de $\|C\|_\infty / \varepsilon$, la tasa se deteriora exponencialmente cuando $\varepsilon \rightarrow 0$: cuanto más cerca del problema exacto, más lento el algoritmo. Éste es el compromiso fundamental del método, que en la práctica se maneja combinando valores decrecientes de ε y realizando los cálculos en el dominio logarítmico, es decir, directamente sobre (φ, ψ) mediante (13.3.1), para evitar los desbordamientos numéricos de $e^{-c_{ij}/\varepsilon}$. Véase [17, Chapter 4].

13.4. Los límites $\varepsilon \rightarrow 0$ y $\varepsilon \rightarrow \infty$

El problema entrópico interpola entre dos problemas que ya conocemos: cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$ domina la entropía y el plan tiende al producto $a \otimes b$; cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ domina el costo y el plan tiende a un plan óptimo del problema de Kantorovich. El segundo límite es el que hace del algoritmo de Sinkhorn un método para calcular transporte óptimo.

PROPOSICIÓN 13.4.1 (Límite $\varepsilon \rightarrow \infty$). $\pi^\varepsilon \rightarrow a \otimes b$ cuando $\varepsilon \rightarrow \infty$.

DEMOSTRACIÓN. Por optimalidad de π^ε comparado con $a \otimes b$, cuya entropía relativa es cero,

$$\varepsilon \text{KL}(\pi^\varepsilon | a \otimes b) \leq \langle C, a \otimes b \rangle - \langle C, \pi^\varepsilon \rangle \leq 2\|C\|_\infty,$$

luego $\text{KL}(\pi^\varepsilon | a \otimes b) \leq 2\|C\|_\infty/\varepsilon \rightarrow 0$. Como $\Pi(a, b)$ es compacto, todo punto límite $\bar{\pi}$ de π^ε satisface $\text{KL}(\bar{\pi} | a \otimes b) = 0$ por continuidad, y por el Lema 13.1.2 $\bar{\pi} = a \otimes b$. Una sucesión en un compacto con un único punto límite converge a él. $\square$

Para el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ hay una sutileza: el problema de Kantorovich puede tener varios planes óptimos, y hay que identificar a cuál de ellos converge π^ε . La respuesta es la más natural: al de mayor entropía.

TEOREMA 13.4.2 (Límite $\varepsilon \rightarrow 0$). *Sea $\Pi^0(a, b) \subset \Pi(a, b)$ el conjunto (no vacío, convexo y compacto) de planes óptimos del problema de Kantorovich $\text{OT}(a, b)$. Entonces:*

1. $\text{OT}_\varepsilon(a, b) \rightarrow \text{OT}(a, b)$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$; más precisamente,

$$0 \leq \text{OT}_\varepsilon(a, b) - \text{OT}(a, b) \leq \varepsilon \log \frac{1}{\min_i a_i}$$

(para pesos uniformes $a_i = 1/n$, la cota es $\varepsilon \log n$).

2. $\pi^\varepsilon \rightarrow \pi^0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0^+$, donde π^0 es el único plan óptimo de máxima entropía:

$$\pi^0 = \arg \min \{ \text{KL}(\pi | a \otimes b) : \pi \in \Pi^0(a, b) \}.$$

DEMOSTRACIÓN. El conjunto $\Pi^0(a, b)$ es el conjunto de minimizadores de una función lineal continua sobre el politopo compacto $\Pi(a, b)$: es no vacío, cerrado y convexo. Sobre él, $\text{KL}(\cdot | a \otimes b)$ es continua y estrictamente convexa (Lema 13.1.2), luego tiene un único minimizador π^0 .

Ítem 1. La desigualdad $\text{OT}_\varepsilon \geq \text{OT}$ es inmediata, pues $\text{KL} \geq 0$. Para la otra, comparamos con π^0 :

$$\text{OT}_\varepsilon(a, b) \leq \langle C, \pi^0 \rangle + \varepsilon \text{KL}(\pi^0 | a \otimes b) = \text{OT}(a, b) + \varepsilon \text{KL}(\pi^0 | a \otimes b),$$

y basta acotar la entropía relativa de cualquier plan $\pi \in \Pi(a, b)$: como $\pi_{ij} \leq b_j$ (sumando en i), se tiene $\frac{\pi_{ij}}{a_i b_j} \leq \frac{1}{a_i} \leq \frac{1}{\min_i a_i}$, y por lo tanto

$$\text{KL}(\pi | a \otimes b) = \sum_{ij} \pi_{ij} \log \frac{\pi_{ij}}{a_i b_j} \leq \left(\sum_{ij} \pi_{ij} \right) \log \frac{1}{\min_i a_i} = \log \frac{1}{\min_i a_i}.$$

(Intercambiando los roles de a y b se obtiene también la cota con $\min_j b_j$.)

Ítem 2. Sea $\bar{\pi}$ un punto límite de π^ε a lo largo de una sucesión $\varepsilon_\ell \rightarrow 0$; existe por compacidad de $\Pi(a, b)$.

Primero, $\bar{\pi} \in \Pi^0(a, b)$: por el ítem 1 y la no negatividad de la entropía relativa, $\langle C, \pi^{\varepsilon_\ell} \rangle \leq \text{OT}_{\varepsilon_\ell}(a, b) \rightarrow \text{OT}(a, b)$, y pasando al límite por continuidad, $\langle C, \bar{\pi} \rangle \leq \text{OT}(a, b)$, luego $\bar{\pi}$ es óptimo.

Segundo, $\bar{\pi}$ minimiza la entropía relativa en $\Pi^0(a, b)$: por optimalidad de π^{ε_ℓ} comparado con π^0 ,

$$\langle C, \pi^{\varepsilon_\ell} \rangle + \varepsilon_\ell \text{KL}(\pi^{\varepsilon_\ell} | a \otimes b) \leq \langle C, \pi^0 \rangle + \varepsilon_\ell \text{KL}(\pi^0 | a \otimes b),$$

y como $\langle C, \pi^{\varepsilon_\ell} \rangle \geq \text{OT}(a, b) = \langle C, \pi^0 \rangle$, resulta $\text{KL}(\pi^{\varepsilon_\ell} | a \otimes b) \leq \text{KL}(\pi^0 | a \otimes b)$ para todo ℓ . Pasando al límite por continuidad, $\text{KL}(\bar{\pi} | a \otimes b) \leq \text{KL}(\pi^0 | a \otimes b)$, y como $\bar{\pi} \in \Pi^0(a, b)$ y π^0 es el único minimizador allí, $\bar{\pi} = \pi^0$.

Todo punto límite de π^ε es π^0 ; por compacidad, $\pi^\varepsilon \rightarrow \pi^0$. $\square$

OBSERVACIÓN 13.4.3 (Los potenciales entrópicos convergen a potenciales de Kantorovich). El Teorema 13.4.2 tiene una consecuencia para el problema dual que cierra el círculo con el Capítulo 5. Normalicemos los potenciales entrópicos con $\varphi_1^\varepsilon = 0$. Un argumento idéntico al Paso 2 de la demostración del Teorema 13.3.2 muestra que $(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ está acotado uniformemente para $\varepsilon \in (0, 1]$. Sea (φ^0, ψ^0) un punto límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Por (13.2.4) y la convergencia uniforme del Lema 13.2.4,

$$\psi^0 = (\varphi^0)^c, \quad \varphi^0 = (\psi^0)^c,$$

es decir, (φ^0, ψ^0) es un par admisible de potenciales c -cóncavos en el sentido del Capítulo 5. Además, de (13.2.1), para cada par (i, j) con $\pi_{ij}^0 > 0$ se tiene $\varepsilon \log \frac{\pi_{ij}^\varepsilon}{a_i b_j} = \varphi_i^\varepsilon + \psi_j^\varepsilon - c_{ij} \rightarrow 0$ (pues $\pi_{ij}^\varepsilon \rightarrow \pi_{ij}^0 > 0$), de modo que $\varphi_i^0 + \psi_j^0 = c_{ij}$ sobre el soporte de π^0 . Por el criterio de optimalidad (Proposición 6.3.3, en su versión discreta del Capítulo 5), (φ^0, ψ^0) es un par de potenciales de Kantorovich óptimos.

Esto proporciona una demostración de la existencia de potenciales de Kantorovich en el caso discreto que no pasa por la dualidad fuerte de programación lineal: los potenciales se obtienen como límite de los potenciales entrópicos, cuya existencia es elemental. Y muestra que el algoritmo de Sinkhorn, para ε pequeño, calcula simultáneamente el plan óptimo y los potenciales duales del problema de Kantorovich.

OBSERVACIÓN 13.4.4 (Interpretación probabilística: el puente de Schrödinger). El problema entrópico admite una lectura en el espíritu de la Sección 1.4. La entropía relativa $\text{KL}(\pi | a \otimes b)$ mide cuánto se aleja el acoplamiento π de la independencia; minimizar $\langle C, \pi \rangle + \varepsilon \text{KL}$ es buscar la ley conjunta de $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ con marginales dadas que sea «lo más independiente posible» sujeta a un costo esperado bajo. Con $c(x, y) = |x - y|^2$ y ε proporcional a la temperatura, π^ε es la ley de los extremos de un movimiento browniano condicionado a tener marginales a y b en los tiempos inicial y final: éste es el *problema del puente de Schrödinger* (1931), que precede a la formulación de Kantorovich en más de una década. La relación entre ambos problemas y el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ como límite de temperatura cero están desarrollados en [14].

13.5. Baricentros entrópicos

Terminamos con la aplicación que motivó buena parte del desarrollo computacional reciente: el cálculo de baricentros de Wasserstein del Capítulo 12. Como allí, fijamos medidas $\mu_1, \dots, \mu_N$ y pesos $\lambda_1, \dots, \lambda_N > 0$ con $\sum \lambda_k = 1$. Para hacer el problema finito-dimensional, suponemos que todas las medidas están soportadas en un mismo conjunto finito de puntos $\{z_1, \dots, z_n\}$ —una *grilla*— y buscamos el baricentro también entre las medidas soportadas en la grilla. Identificamos entonces μ_k con un vector $b^k \in \mathbb{R}^n$ de pesos positivos, la incógnita μ con un vector a en el simplex

$$\Sigma_n = \left\{ a \in \mathbb{R}^n : a_i \geq 0, \sum_i a_i = 1 \right\},$$

y el costo es la matriz $C_{ij} = |z_i - z_j|^2$.

DEFINICIÓN 13.5.1 (Baricentro entrópico). El *baricentro entrópico* de (b^k, λ_k) con parámetro $\varepsilon > 0$ es el minimizador de

$$\mathcal{F}_\varepsilon(a) = \sum_{k=1}^N \lambda_k \text{OT}_\varepsilon(a, b^k), \quad a \in \Sigma_n.$$

Para $\varepsilon = 0$, con $\text{OT}_0 = \text{OT}$, ésta es la versión discreta del funcional de baricentro del Capítulo 12 restringido a la grilla.

PROPOSICIÓN 13.5.2. Para todo $\varepsilon > 0$, la función $a \mapsto \text{OT}_\varepsilon(a, b)$ es convexa en Σ_n para cada b fijo, y $\mathcal{F}_\varepsilon$ alcanza su mínimo en Σ_n .

DEMOSTRACIÓN. La función $(a, \pi) \mapsto \langle C, \pi \rangle + \varepsilon \text{KL}(\pi | a \otimes b)$ es convexa conjuntamente en (a, π) : el primer término es lineal y, en el segundo, cada sumando $\pi_{ij} \log \pi_{ij} - \pi_{ij} \log a_i - \pi_{ij} \log b_j$ es convexo en (π_{ij}, a_i) : el último término es lineal en π_{ij} , y los dos primeros suman $\pi_{ij} \log(\pi_{ij}/a_i)$, donde $(p, q) \mapsto p \log(p/q)$ es convexa en $\{p \geq 0, q > 0\}$ por ser la *perspectiva* $q f(p/q)$ de la función convexa $f(p) = p \log p$ (Ejercicio 13.5.3). El ínfimo en π de una función conjuntamente convexa de (a, π) , sobre un conjunto de restricciones convexo en (a, π) (las marginales son lineales en (a, π)), es una función convexa de a . Luego $\text{OT}_\varepsilon(\cdot, b)$ es convexa, y $\mathcal{F}_\varepsilon$ también.

Para la existencia del mínimo basta ver que $a \mapsto \text{OT}_\varepsilon(a, b)$ es semicontinua inferiormente en Σ_n , que es compacto. Sean $a^\ell \rightarrow a$ en Σ_n y $\pi^\ell \in \Pi(a^\ell, b)$ óptimos. Pasando a una subsucesión, $\pi^\ell \rightarrow \pi$, y necesariamente $\pi \in \Pi(a, b)$. Como $(p, q) \mapsto p \log(p/q)$ es semicontinua inferiormente en $\{p \geq 0, q \geq 0\}$ (con los valores $+\infty$ si $q = 0 < p$ y 0 si $p = 0$; en efecto, es continua donde $q > 0$ y la desigualdad $p \log(p/q) \geq p - q$, que sigue de $\log x \geq 1 - 1/x$, da el límite inferior correcto en $q = 0$),

$$\text{OT}_\varepsilon(a, b) \leq \langle C, \pi \rangle + \varepsilon \text{KL}(\pi | a \otimes b) \leq \liminf_\ell (\langle C, \pi^\ell \rangle + \varepsilon \text{KL}(\pi^\ell | a^\ell \otimes b)) = \liminf_\ell \text{OT}_\varepsilon(a^\ell, b),$$

que es la semicontinuidad buscada. $\square$

EJERCICIO 13.5.3. Sea $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Probar que su *perspectiva* $g(p, q) = q f(p/q)$ es convexa en $\{p > 0, q > 0\}$, y deducir que $(p, q) \mapsto p \log(p/q)$ es convexa en $\{p \geq 0, q > 0\}$ (con $0 \log 0 = 0$).

OBSERVACIÓN 13.5.4. La convexidad de $a \mapsto \text{OT}_\varepsilon(a, b)$ —y de su análogo sin regularizar $a \mapsto \text{OT}(a, b)$ — es la contraparte discreta del Lema 12.3.1: el costo de transporte es convexo respecto de la estructura lineal de las medidas. Si además alguna de las b^k tiene todas sus entradas positivas, se puede probar que $\mathcal{F}_\varepsilon$ es estrictamente convexa y el baricentro entrópico es único; no lo haremos.

El baricentro entrópico se calcula con una variante del algoritmo de Sinkhorn debida a Benamou, Carlier, Cuturi, Nenna y Peyré [4]. La idea es escribir cada uno de los N planes en la forma $\pi^k = \text{diag}(u^k) K^\varepsilon \text{diag}(v^k)$ e imponer alternadamente las dos condiciones: que la segunda marginal de π^k sea b^k , y que las primeras marginales de todos los π^k coincidan entre sí. La segunda condición, junto con la estructura entrópica, identifica la marginal común como una media geométrica ponderada.

Algoritmo (Sinkhorn para baricentros). Inicializar $v^k = \mathbf{1}$ para todo k y $a = \frac{1}{n} \mathbf{1}$. Repetir:

1. Para cada k : $u^k \leftarrow \frac{a}{K^\varepsilon v^k}$.
2. Para cada k : $v^k \leftarrow \frac{b^k}{(K^\varepsilon)^T u^k}$.
3. Actualizar la marginal común como media geométrica ponderada:

$$a \leftarrow \prod_{k=1}^N (u^k \odot K^\varepsilon v^k)^{\lambda_k},$$

con producto $\odot$ y potencias entrada a entrada.

Cada paso es una proyección, en el sentido de la entropía relativa, sobre uno de los conjuntos de restricciones; el algoritmo es un caso de *proyecciones de Bregman iteradas*, y su convergencia al baricentro entrópico está demostrada en [4]. No reproducimos la demostración; el cuaderno de cómputo que acompaña al curso implementa el algoritmo y verifica numéricamente que, para ε pequeño, recupera los baricentros explícitos del Capítulo 12: el promedio de cuantiles en dimensión uno y el punto fijo gaussiano.

OBSERVACIÓN 13.5.5 (Un balance). Las notas empezaron con el problema de Monge y terminan con un algoritmo que alterna normalizaciones de una matriz. Vale la pena mirar hacia atrás y ver que el algoritmo *es* la teoría: los escalamientos u, v son los potenciales de Kantorovich de los Capítulos 5 y 6 exponenciados; el paso de Sinkhorn es la mejora de potenciales $\varphi \mapsto \varphi^{cc}$ suavizada; la forma del plan es la condición de saturación $\varphi_i + \psi_j = c_{ij}$ relajada; el límite $\varepsilon \rightarrow 0$ recupera el plan óptimo de Kantorovich y sus potenciales; y el baricentro entrópico es el baricentro de Agueh–Carlier con un término que lo hace calculable. La estructura variacional que se desarrolló a lo largo del curso no es un preámbulo al cálculo: es lo que el cálculo efectivamente computa.

Ejercicios

EJERCICIO 13.1 (Propiedades de la entropía relativa). Sean $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ con entradas positivas y $\pi \in \Pi(a, b)$.

- (a) Probar que $\text{KL}(\pi | a \otimes b) = \sum_{ij} \pi_{ij} \log \pi_{ij} - \sum_i a_i \log a_i - \sum_j b_j \log b_j$; es decir, sobre $\Pi(a, b)$ la entropía relativa difiere de la entropía negativa $\sum \pi_{ij} \log \pi_{ij}$ en una constante. Deducir que el regularizador de Peyré–Cuturi de la Observación 13.2.2 produce el mismo minimizador π^ε .
- (b) (Desigualdad de Pinsker.) Probar que $\|\pi - a \otimes b\|_1^2 \leq 2 \text{KL}(\pi | a \otimes b)$. *Sugerencia:* reducirlo al caso de dos puntos (agrupar según el signo de $\pi_{ij} - a_i b_j$ y usar la convexidad de KL) y estudiar la función $t \mapsto t \log \frac{t}{p} + (1-t) \log \frac{1-t}{1-p} - 2(t-p)^2$.
- (c) Deducir de (b) y de la Proposición 13.4.1 la velocidad $\|\pi^\varepsilon - a \otimes b\|_1 \leq 2\sqrt{\|C\|_\infty / \varepsilon}$.
- (d) Probar que la cota $\text{KL}(\pi | a \otimes b) \leq \log \frac{1}{\min_i a_i}$ usada en el Teorema 13.4.2 es óptima: para $a = b$ uniformes en n puntos y π una matriz de permutación dividida por n hay igualdad.

EJERCICIO 13.2 (El valor entrópico como función de ε). (a) Probar que $\varepsilon \mapsto \text{OT}_\varepsilon(a, b)$ es no decreciente y cóncava en $(0, \infty)$ (es un ínfimo de funciones afines de ε), y que

$$\frac{d}{d\varepsilon} \text{OT}_\varepsilon(a, b) = \text{KL}(\pi^\varepsilon | a \otimes b)$$

donde sea derivable.

- (b) Deducir que $\varepsilon \mapsto \text{KL}(\pi^\varepsilon \mid a \otimes b)$ es no creciente y que $\varepsilon \mapsto \langle C, \pi^\varepsilon \rangle$ es no decreciente: al aumentar la regularización el plan se vuelve más “desordenado” y más caro.
- (c) Probar que $\lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \text{OT}_\varepsilon(a, b) = \langle C, a \otimes b \rangle$ y que $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{OT}_\varepsilon(a, b) = \text{OT}(a, b)$, y que ambas convergencias son monótonas.

EJERCICIO 13.3 (El soft-min). Con la notación de la Definición 13.2.3:

- (a) Probar que $(\varphi + s)^{c, \varepsilon} = (\varphi)^{c, \varepsilon} - s$ para $s \in \mathbb{R}$, y que $\varphi \leq \tilde{\varphi}$ implica $(\varphi)^{c, \varepsilon} \geq (\tilde{\varphi})^{c, \varepsilon}$.
- (b) Probar que $\varphi \mapsto (\varphi)_j^{c, \varepsilon}$ es cóncava y de clase C^∞ , y calcular su gradiente: es (menos) el vector de probabilidad $(a_i e^{(\varphi_i - c_{ij})/\varepsilon} / \sum_k a_k e^{(\varphi_k - c_{kj})/\varepsilon})_i$, la j -ésima columna normalizada del plan. Comparar con la c -transformada $\varphi_j^c = \min_i \{c_{ij} - \varphi_i\}$, que no es diferenciable.
- (c) Probar que $\varphi \mapsto (\varphi)^{c, \varepsilon}$ es 1-Lipschitz para la norma $\|\cdot\|_\infty$, y que para $\varepsilon \rightarrow \infty$, $(\varphi)_j^{c, \varepsilon} \rightarrow \sum_i a_i (c_{ij} - \varphi_i)$: el soft-min tiende al promedio.

EJERCICIO 13.4 (Unicidad de los potenciales entrópicos). Sean (φ, ψ) y (φ', ψ') dos pares tales que $a_i b_j e^{(\varphi_i + \psi_j - c_{ij})/\varepsilon}$ y $a_i b_j e^{(\varphi'_i + \psi'_j - c_{ij})/\varepsilon}$ son ambos planes de $\Pi(a, b)$.

- (a) Probar que ambos planes coinciden (son el único minimizador π^ε), y deducir que $\varphi_i + \psi_j = \varphi'_i + \psi'_j$ para todo (i, j) .
- (b) Concluir que $(\varphi', \psi') = (\varphi + s, \psi - s)$ para algún $s \in \mathbb{R}$. Contrastar con el caso $\varepsilon = 0$ (Ejercicio 5.2), en el que los potenciales pueden no ser únicos: ¿qué propiedad del plan entrópico lo explica?
- (c) Probar que si $a = b$ y C es simétrica, entonces $\varphi^\varepsilon = \psi^\varepsilon$ con la normalización adecuada, y que en ese caso una iteración de Sinkhorn puede escribirse con un solo potencial.

EJERCICIO 13.5 (Los potenciales entrópicos convergen a potenciales de Kantorovich). Completar los detalles de la Observación 13.4.3.

- (a) Normalizando $\varphi_1^\varepsilon = 0$, probar que $(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$ está acotado uniformemente para $\varepsilon \in (0, 1]$. *Sugerencia:* $\psi^\varepsilon = (\varphi^\varepsilon)^{c, \varepsilon}$ y el Lema 13.2.4 dan $\|\psi^\varepsilon - (\varphi^\varepsilon)^c\|_\infty \leq \varepsilon \log \frac{1}{\min a_i}$; usar que las c -transformadas de funciones con $\varphi_1 = 0$ están acotadas.
- (b) Probar que todo punto límite (φ^0, ψ^0) satisface $\psi^0 = (\varphi^0)^c$, $\varphi^0 = (\psi^0)^c$ y $\varphi_i^0 + \psi_j^0 = c_{ij}$ sobre el soporte de π^0 , y concluir que es un par óptimo del problema dual de Kantorovich.
- (c) ¿Converge toda la familia $(\varphi^\varepsilon, \psi^\varepsilon)$, o sólo subsucesiones? Discutirlo en el ejemplo del Ejercicio 5.1, donde los potenciales de Kantorovich forman un segmento: ¿a qué punto del segmento converge el límite entrópico? (La respuesta es delicada; ver [7].)

EJERCICIO 13.6 (Sinkhorn en un paso). (a) Probar que si C es de la forma $c_{ij} = f_i + g_j$ entonces $\pi^\varepsilon = a \otimes b$ para todo ε , y el algoritmo de Sinkhorn converge en una iteración.

- (b) Recíprocamente, probar que si $\pi^\varepsilon = a \otimes b$ para algún $\varepsilon > 0$, entonces C es de la forma (a). Deducir que π^ε tiene rango uno si y sólo si C es de la forma (a).
- (c) Sea $n = m = 2$. Escribir explícitamente π^ε en función de a, b, C y ε (el problema se reduce a una ecuación escalar) y verificar a mano los límites $\varepsilon \rightarrow 0$ y $\varepsilon \rightarrow \infty$.

- EJERCICIO 13.7 (Baricentros entrópicos). (a) Probar que si alguna b^k tiene todas sus entradas positivas, entonces $a \mapsto \text{OT}_\varepsilon(a, b^k)$ es estrictamente convexa en Σ_n y el baricentro entrópico es único. *Sugerencia:* la función $(a, \pi) \mapsto \langle C, \pi \rangle + \varepsilon \text{KL}(\pi | a \otimes b^k)$ es estrictamente convexa en π y el minimizador depende continuamente de a ; estudiar la igualdad en la desigualdad de convexidad.
- (b) Interpretar el paso 3 del algoritmo de la Sección 13.5 como una *proyección de Bregman*: dados los planes $\pi^1, \dots, \pi^N$ (con primeras marginales $m^k = \pi^k \mathbf{1}$ distintas), probar que el problema

$$\min \left\{ \sum_k \lambda_k \text{KL}(\tilde{\pi}^k | \pi^k) : \tilde{\pi}^k \mathbf{1} = a \text{ para todo } k, a \in \Sigma_n \right\}$$

tiene solución $\tilde{\pi}^k = \text{diag}(a/m^k) \pi^k$ con $a \propto \prod_k (m^k)^{\lambda_k}$ (media geométrica ponderada), que es la actualización del algoritmo. ¿Por qué no aparece la media aritmética?

- (c) En el ejemplo de no unicidad del Capítulo 12 (μ_1 con átomos en $(\pm 1, 0)$, μ_2 con átomos en $(0, \pm 1)$, sobre una grilla que contenga los cuatro candidatos $(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{2})$), probar que el baricentro entrópico es único para todo $\varepsilon > 0$ y simétrico respecto de los dos ejes, y describir su límite cuando $\varepsilon \rightarrow 0$.

Ejercicios computacionales. Los ejercicios siguientes se resuelven con el cuaderno *Transporte entrópico y Sinkhorn* (véase el Apéndice E); los enunciados figuran también al final del cuaderno. Las referencias a secciones son a las del cuaderno.

EJERCICIO 13.8 (Convergencia de valores). Graficar $\varepsilon \mapsto \text{OT}_\varepsilon(a, b) - \text{OT}(a, b)$ en escala logarítmica en ambos ejes para el ejemplo de la Sección 1 del cuaderno y estimar el orden de convergencia. ¿Es $O(\varepsilon)$, como garantiza el Teorema 13.4.2, o mejor? Comparar la constante observada con $\log(1/\min_i a_i)$.

EJERCICIO 13.9 (Sinkhorn y la mejora de potenciales). Implementar la mejora de potenciales $\varphi \mapsto \varphi^{c\bar{c}}$ de la Proposición 6.1.5, sin regularización, y compararla con la iteración de Sinkhorn para ε pequeño partiendo del mismo φ . ¿Converge la versión no regularizada? ¿Y la regularizada?

EJERCICIO 13.10 (Costo de cada iteración). Medir el tiempo de una iteración de Sinkhorn para $n = m = 500, 1000, 2000, 4000$ y verificar el crecimiento $O(nm)$. Comparar con el tiempo del solver exacto (`ot.emd`) para los mismos tamaños.

EJERCICIO 13.11 (Un baricentro con $\varepsilon \rightarrow 0$). En el ejemplo de la Sección 5.1 del cuaderno, calcular el baricentro entrópico de la Proposición 13.5.2 para $\varepsilon \in \{0.5, 0.2, 0.1, 0.05, 0.02, 0.01, 0\}$, y graficar la distancia W_2 entre el baricentro entrópico y el exacto en función de ε , en escala logarítmica en ambos ejes. ¿Cuántas iteraciones hacen falta en cada caso?

EJERCICIO 13.12 (Unicidad del baricentro entrópico). Verificar numéricamente que el baricentro entrópico del ejemplo de no unicidad del Ejemplo 12.1.2 (μ_1 con átomos en $(\pm 1, 0)$, μ_2 con átomos en $(0, \pm 1)$, sobre una grilla que contenga los cuatro candidatos) es *único* y simétrico: la entropía rompe la degeneración eligiendo la combinación más “repartida”. Comparar con el Ejercicio 13.7.

Apéndice A

Complementos de teoría de la medida

Este apéndice reúne el material de teoría de la medida que las notas usan y que no es propio del transporte óptimo. La primera sección es un repaso elemental de las definiciones básicas — σ -álgebras, medidas, funciones medibles e integral— pensado para fijar el lenguaje y la notación del Capítulo 1; el lector que las conozca puede omitirla. Las secciones siguientes tienen otro carácter: presentan el teorema de desintegración de medidas en espacios polacos y su consecuencia más importante para estas notas, el *lema de pegado*, que son las herramientas técnicas de los Capítulos 10 y 12.

A.1. Repaso de teoría de la medida

Sea X un conjunto no vacío.

DEFINICIÓN A.1.1 (σ -álgebra). Una familia $\mathcal{A} \subset 2^X$ se denomina una σ -álgebra sobre X si satisface:

1. $X \in \mathcal{A}$.
2. Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $A^c \in \mathcal{A}$.
3. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, entonces $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Los elementos de una σ -álgebra se denominan *conjuntos medibles*.

Los ejemplos más sencillos de σ -álgebras son la σ -álgebra trivial $\{\emptyset, X\}$ y la σ -álgebra discreta 2^X , formada por todos los subconjuntos de X .

En general, si $\mathcal{E} \subset 2^X$ es una familia cualquiera de subconjuntos de X , existe una única menor σ -álgebra que contiene a $\mathcal{E}$, llamada la σ -álgebra generada por $\mathcal{E}$ y denotada por $\sigma(\mathcal{E})$. Equivalentemente,

$$\sigma(\mathcal{E}) = \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ es una } \sigma\text{-álgebra y } \mathcal{E} \subset \mathcal{A} \}.$$

En muchos contextos el conjunto X posee además una estructura de espacio métrico (o, más generalmente, de espacio topológico). En estos casos resulta natural exigir que todos los conjuntos abiertos sean medibles. La menor σ -álgebra que contiene a los abiertos de X se denomina σ -álgebra de Borel y se denota por $\mathcal{B}(X)$.

Los elementos de $\mathcal{B}(X)$ reciben el nombre de *conjuntos borelianos*. En particular, cuando $X = \mathbb{R}^d$, trabajaremos siempre con la σ -álgebra de Borel, salvo que se indique explícitamente lo contrario.

DEFINICIÓN A.1.2 (Espacio medible). Un *espacio medible* es un par $(X, \mathcal{A})$, donde X es un conjunto y $\mathcal{A}$ es una σ -álgebra sobre X .

DEFINICIÓN A.1.3 (Medida). Sea $(X, \mathcal{A})$ un espacio medible. Una *medida* sobre $(X, \mathcal{A})$ es una función $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$ que satisface:

1. $\mu(\emptyset) = 0$.
2. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ son disjuntos dos a dos, entonces

$$\mu \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

La propiedad 2 se denomina σ -aditividad.

Una medida μ se dice *finita* si $\mu(X) < \infty$. Denotaremos por $\mathcal{M}_+(X)$ al conjunto de todas las medidas finitas sobre X .

Si además $\mu(X) = 1$, se dice que μ es una *medida de probabilidad*. El conjunto de todas las medidas de probabilidad sobre X se denota por $\mathcal{P}(X)$.

DEFINICIÓN A.1.4 (Función medible). Sean $(X, \mathcal{A})$ e $(Y, \mathcal{B})$ dos espacios medibles. Una aplicación $f: X \rightarrow Y$ se dice *medible* si $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ para todo $B \in \mathcal{B}$.

En particular, si $Y = \mathbb{R}$, se entiende que $\mathbb{R}$ está provisto de su σ -álgebra de Borel.

DEFINICIÓN A.1.5 (Función indicadora). Sea $A \in \mathcal{A}$. La *función indicadora* de A es la función $\mathbf{1}_A: X \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

DEFINICIÓN A.1.6 (Función simple). Una función medible $s: X \rightarrow \mathbb{R}$ se dice *simple* si toma un número finito de valores. Equivalentemente,

$$s = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

donde $a_i \in \mathbb{R}$ y los conjuntos $A_i \in \mathcal{A}$ son medibles, disjuntos dos a dos. Sin pérdida de generalidad puede suponerse que $X = \bigcup_{i=1}^N A_i$.

DEFINICIÓN A.1.7 (Integral de una función simple). Sea

$$s = \sum_{i=1}^N a_i \mathbf{1}_{A_i},$$

donde $a_i \geq 0$ y $A_1, \dots, A_N \in \mathcal{A}$ son dos a dos disjuntos. Se define la integral de s respecto de la medida μ por

$$\int_X s d\mu := \sum_{i=1}^N a_i \mu(A_i).$$

DEFINICIÓN A.1.8 (Integral de una función no negativa). Sea $f: X \rightarrow [0, \infty]$ una función medible. Se define la integral de f respecto de μ por

$$\int_X f d\mu := \sup \left\{ \int_X s d\mu : \begin{array}{l} s \text{ es simple,} \\ 0 \leq s \leq f \end{array} \right\}.$$

Sea ahora $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Se definen

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad f^-(x) = \max\{-f(x), 0\},$$

Observemos que se tiene

$$f = f^+ - f^-, \quad |f| = f^+ + f^-.$$

DEFINICIÓN A.1.9 (Integral). Sea $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ una función medible. Si al menos una de las cantidades

$$\int_X f^+ d\mu, \quad \int_X f^- d\mu$$

es finita, se define

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Además, f se dice integrable si

$$\int_X |f| d\mu < \infty.$$

Notación y ejemplos básicos. Resumimos la notación que se usa en todo el texto. Un *espacio medible* es un par $(X, \mathcal{A})$ formado por un conjunto X y una σ -álgebra $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X ; cuando X es un espacio métrico tomaremos siempre $\mathcal{A} = \mathcal{B}(X)$, la σ -álgebra de Borel, y en particular en $\mathbb{R}^d$ trabajaremos con los borelianos y con la medida de Lebesgue $\mathcal{L}^d$. Denotamos por $\mathcal{M}_+(X)$ al conjunto de las medidas finitas sobre X y por

$$\mathcal{P}(X) = \{\mu \in \mathcal{M}_+(X) : \mu(X) = 1\}$$

al de las medidas de probabilidad. Para $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ medible e integrable escribimos $\int_X f d\mu$ para su integral, y $\mathbf{1}_A$ para la función indicadora de un conjunto A . Los dos ejemplos de medidas de probabilidad que aparecerán constantemente son los siguientes.

DEFINICIÓN A.1.10 (Medida de Dirac). Dado $x_0 \in X$, la medida de Dirac en x_0 es

$$\delta_{x_0}(A) = \begin{cases} 1, & x_0 \in A, \\ 0, & x_0 \notin A. \end{cases}$$

EJEMPLO A.1.11 (Medidas discretas). Sea X un conjunto cualquiera y sea $(x_i)_{i \in I} \subset X$ una familia finita o numerable de puntos. Dados pesos $m_i \geq 0$, se define la medida

$$\mu = \sum_{i \in I} m_i \delta_{x_i},$$

donde δ_{x_i} denota la medida de Dirac concentrada en x_i .

Equivalentemente, para todo conjunto medible $A \subset X$,

$$\mu(A) = \sum_{x_i \in A} m_i.$$

Si además

$$\sum_{i \in I} m_i = 1,$$

entonces μ es una medida de probabilidad.

EJEMPLO A.1.12 (Medidas con densidad). Sea $X = \mathbb{R}^d$ provisto de la σ -álgebra de Borel y sea

$$\rho: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, \infty]$$

una función medible. Se define la medida

$$\mu(A) = \int_A \rho(x) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbf{1}_A(x) \rho(x) dx,$$

para todo conjunto boreliano $A \subset \mathbb{R}^d$.

En este caso se dice que μ tiene densidad ρ respecto de la medida de Lebesgue, y se escribe

$$d\mu(x) = \rho(x) dx.$$

Si además

$$\int_{\mathbb{R}^d} \rho(x) dx = 1,$$

entonces μ es una medida de probabilidad.

Para la teoría general (teoremas de convergencia, Radon–Nikodým, medidas producto y Fubini) remitimos a cualquier texto de teoría de la medida, por ejemplo [5].

A.2. El teorema de desintegración

En este apéndice presentamos el teorema de desintegración de medidas y su consecuencia más importante para estas notas, el *lema de pegado*, que permite «componer» dos planes de transporte que comparten una marginal. Este lema es la herramienta central en la demostración de la desigualdad triangular para las distancias de Wasserstein del Capítulo 10.

La desintegración tiene además una interpretación probabilística muy natural, que ya insinuamos en la Sección 1.4: si $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ es la ley conjunta de un par $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$, la desintegración de π respecto de μ no es otra cosa que la familia de leyes condicionales de $\mathbf{Y}$ dado $\mathbf{X} = x$.

Enunciamos el teorema en toda su generalidad —espacios polacos, que es el marco en el que trabajamos en todo el texto— y damos la demostración en los dos casos que efectivamente se usan de manera explícita: medidas discretas y medidas con densidad. La demostración general puede consultarse en [3, Theorem 5.3.1].

En lo que sigue, X e Y son espacios polacos y todas las medidas son borelianas.

TEOREMA A.2.1 (Desintegración). Sea $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$ y sea $\mu = (\mathbf{p}_1)_\# \pi$ su primera marginal. Entonces existe una familia $\{\pi_x\}_{x \in X} \subset \mathcal{P}(Y)$ tal que

1. para todo boreliano $B \subset Y$, la función $x \mapsto \pi_x(B)$ es boreliana;
2. para todos los borelianos $A \subset X$, $B \subset Y$,

$$(A.2.1) \quad \pi(A \times B) = \int_A \pi_x(B) d\mu(x).$$

La familia es única μ -c.t.p.: si $\{\tilde{\pi}_x\}$ es otra familia con las mismas propiedades, entonces $\pi_x = \tilde{\pi}_x$ para μ -c.t.p. x .

Equivalentemente, para toda función boreliana $f: X \times Y \rightarrow [0, +\infty]$,

$$(A.2.2) \quad \int_{X \times Y} f \, d\pi = \int_X \left(\int_Y f(x, y) \, d\pi_x(y) \right) d\mu(x),$$

y la misma identidad vale para $f \in L^1(\pi)$.

Escribiremos $\pi = \pi_x \otimes \mu$, o bien $d\pi(x, y) = d\pi_x(y) d\mu(x)$, para indicar que $\{\pi_x\}$ es la desintegración de π respecto de su primera marginal. Naturalmente, intercambiando los roles de X e Y se obtiene la desintegración respecto de la segunda marginal.

Que (A.2.1) implica (A.2.2) es un argumento estándar: la identidad vale para indicadoras de rectángulos, luego para indicadoras de borelianos por el teorema de la clase monótona, luego para funciones simples por linealidad, y para $f \geq 0$ arbitraria por convergencia monótona; el caso $f \in L^1(\pi)$ se obtiene escribiendo $f = f^+ - f^-$. Obsérvese que en (A.2.2) está implícito que la función $x \mapsto \int_Y f(x, y) \, d\pi_x(y)$ es boreliana, lo cual es parte de la conclusión.

OBSERVACIÓN A.2.2 (Interpretación probabilística). Si $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ es un par de variables aleatorias con ley conjunta π , la medida π_x es la *ley condicional* de $\mathbf{Y}$ dado $\mathbf{X} = x$, y (A.2.2) es la fórmula de la esperanza total: $\mathbb{E}[f(\mathbf{X}, \mathbf{Y})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \mid \mathbf{X}]]$. La afirmación de unicidad μ -c.t.p. refleja que la ley condicional sólo está determinada para valores de x que $\mathbf{X}$ efectivamente toma.

Veamos ahora los dos casos elementales.

PROPOSICIÓN A.2.3 (Caso discreto). *Supongamos que $\mu = \sum_{i \in I} a_i \delta_{x_i}$, con I finito o numerable, $a_i > 0$ y $\sum_i a_i = 1$. Entonces la desintegración de π respecto de μ está dada por*

$$\pi_{x_i}(B) = \frac{\pi(\{x_i\} \times B)}{a_i}, \quad i \in I,$$

y π_x arbitraria (por ejemplo, $\pi_x = \pi_{x_{i_0}}$ para un i_0 fijo) para $x \notin \{x_i\}_{i \in I}$.

DEMOSTRACIÓN. Cada π_{x_i} es una medida de probabilidad en Y , pues $\pi(\{x_i\} \times Y) = \mu(\{x_i\}) = a_i$. La medibilidad de $x \mapsto \pi_x(B)$ es inmediata: la función toma a lo sumo una cantidad numerable de valores, sobre borelianos. Finalmente, como μ está concentrada en $\{x_i\}_{i \in I}$, también lo está la primera marginal de π , de modo que $\pi(A \times B) = \sum_{i: x_i \in A} \pi(\{x_i\} \times B)$ y

$$\int_A \pi_x(B) \, d\mu(x) = \sum_{i: x_i \in A} a_i \pi_{x_i}(B) = \sum_{i: x_i \in A} \pi(\{x_i\} \times B) = \pi(A \times B).$$

□

PROPOSICIÓN A.2.4 (Caso con densidad). *Sean $\sigma \in \mathcal{P}(X)$, $\nu \in \mathcal{P}(Y)$ y sea $\rho: X \times Y \rightarrow [0, +\infty)$ boreliana con $\int_{X \times Y} \rho \, d(\sigma \otimes \nu) = 1$. Consideremos $\pi = \rho(\sigma \otimes \nu)$, es decir, $d\pi(x, y) = \rho(x, y) \, d\sigma(x) \, d\nu(y)$. Entonces:*

1. la primera marginal de π es $\mu = \rho_1 \sigma$, donde $\rho_1(x) = \int_Y \rho(x, y) \, d\nu(y)$;
2. la desintegración de π respecto de μ está dada, para μ -c.t.p. x , por

$$d\pi_x(y) = \frac{\rho(x, y)}{\rho_1(x)} \, d\nu(y).$$

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Tonelli, ρ_1 es boreliana, $\int_X \rho_1 d\sigma = 1$, y para todo boreliano $A \subset X$,

$$\mu(A) = \pi(A \times Y) = \int_A \int_Y \rho(x, y) d\nu(y) d\sigma(x) = \int_A \rho_1 d\sigma,$$

lo que prueba el primer ítem. En particular, $\mu(\{\rho_1 = 0\}) = \int_{\{\rho_1=0\}} \rho_1 d\sigma = 0$, de modo que $\rho_1(x) > 0$ para μ -c.t.p. x y la fórmula del segundo ítem define una medida de probabilidad en Y para esos x (para los restantes, tomamos π_x arbitraria). La medibilidad de $x \mapsto \pi_x(B) = \rho_1(x)^{-1} \int_B \rho(x, y) d\nu(y)$ es nuevamente Tonelli. Finalmente, para $A \subset X$ y $B \subset Y$ borelianos,

$$\begin{aligned} \int_A \pi_x(B) d\mu(x) &= \int_A \frac{1}{\rho_1(x)} \left(\int_B \rho(x, y) d\nu(y) \right) \rho_1(x) d\sigma(x) \\ &= \int_A \int_B \rho(x, y) d\nu(y) d\sigma(x) = \pi(A \times B), \end{aligned}$$

donde usamos que $d\mu = \rho_1 d\sigma$ y que el conjunto $\{\rho_1 = 0\}$ es μ -nulo. $\square$

La Proposición A.2.4 es exactamente la situación del transporte entrópico del Capítulo 13, donde el plan óptimo tiene densidad explícita respecto de $\mu \otimes \nu$.

El siguiente caso particular conecta la desintegración con los planes inducidos por mapas, y no requiere el teorema general.

PROPOSICIÓN A.2.5 (Planes inducidos por mapas). *Sea $T: X \rightarrow Y$ boreliana, $\mu \in \mathcal{P}(X)$ y $\pi = (\text{id}, T)_\# \mu$. Entonces la desintegración de π respecto de μ es*

$$\pi_x = \delta_{T(x)} \quad \text{para } \mu\text{-c.t.p. } x.$$

Recíprocamente, si $\pi \in \mathcal{P}(X \times Y)$ tiene primera marginal μ y su desintegración satisface $\pi_x = \delta_{T(x)}$ para μ -c.t.p. x , entonces $\pi = (\text{id}, T)_\# \mu$.

DEMOSTRACIÓN. Para $A \subset X$, $B \subset Y$ borelianos,

$$\begin{aligned} \pi(A \times B) &= \mu((\text{id}, T)^{-1}(A \times B)) = \mu(A \cap T^{-1}(B)) \\ &= \int_A \mathbf{1}_B(T(x)) d\mu(x) = \int_A \delta_{T(x)}(B) d\mu(x), \end{aligned}$$

y $x \mapsto \delta_{T(x)}(B) = \mathbf{1}_{T^{-1}(B)}(x)$ es boreliana. Por la unicidad del Teorema A.2.1, $\pi_x = \delta_{T(x)}$ μ -c.t.p. Para la recíproca, la misma cuenta leída de derecha a izquierda muestra que π y $(\text{id}, T)_\# \mu$ coinciden en los rectángulos, que forman un π -sistema generador de los borelianos de $X \times Y$. $\square$

En el lenguaje de la Observación A.2.2: un plan está inducido por un mapa exactamente cuando, conocido $\mathbf{X} = x$, el destino $\mathbf{Y}$ es determinista. Ésta es la formalización de la distinción entre los problemas de Monge y de Kantorovich que discutimos en la Sección 1.4, y la razón profunda por la que el Lema 9.1.2 funciona.

A.3. El lema de pegado

Dados $\pi_{12} \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$ y $\pi_{23} \in \Pi(\mu_2, \mu_3)$, queremos construir una medida en $X_1 \times X_2 \times X_3$ cuyas proyecciones sobre los dos primeros factores y sobre los dos últimos sean π_{12} y π_{23} , respectivamente. La idea es transparente si pensamos probabilísticamente: condicionamos ambos planes al valor de la variable intermedia x_2 y, dado x_2 , elegimos x_1 y x_3 de manera independiente.

LEMA A.3.1 (Lema de pegado). Sean X_1, X_2, X_3 espacios polacos, $\mu_i \in \mathcal{P}(X_i)$ para $i = 1, 2, 3$, y sean $\pi_{12} \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$ y $\pi_{23} \in \Pi(\mu_2, \mu_3)$. Entonces existe $\gamma \in \mathcal{P}(X_1 \times X_2 \times X_3)$ tal que

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)_\# \gamma = \pi_{12}, \quad (\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)_\# \gamma = \pi_{23},$$

donde $\mathbf{p}_i: X_1 \times X_2 \times X_3 \rightarrow X_i$ denota la proyección canónica.

DEMOSTRACIÓN. Por el Teorema A.2.1, desintegramos π_{12} respecto de su *segunda* marginal μ_2 y π_{23} respecto de su *primera* marginal, que también es μ_2 :

$$d\pi_{12}(x_1, x_2) = d\pi_{x_2}^{12}(x_1) d\mu_2(x_2), \quad d\pi_{23}(x_2, x_3) = d\pi_{x_2}^{23}(x_3) d\mu_2(x_2),$$

con $\pi_{x_2}^{12} \in \mathcal{P}(X_1)$ y $\pi_{x_2}^{23} \in \mathcal{P}(X_3)$ para μ_2 -c.t.p. x_2 .

Para $f: X_1 \times X_2 \times X_3 \rightarrow [0, +\infty]$ boreliana definimos

$$(A.3.1) \quad \Lambda(f) = \int_{X_2} \left(\int_{X_1} \int_{X_3} f(x_1, x_2, x_3) d\pi_{x_2}^{23}(x_3) d\pi_{x_2}^{12}(x_1) \right) d\mu_2(x_2).$$

Veamos que la expresión tiene sentido, es decir, que la función de x_2 entre paréntesis es boreliana. Si $f = \mathbf{1}_{A_1 \times A_2 \times A_3}$ es la indicadora de un rectángulo, dicha función vale $\mathbf{1}_{A_2}(x_2) \pi_{x_2}^{12}(A_1) \pi_{x_2}^{23}(A_3)$, que es boreliana por el ítem 1 del Teorema A.2.1. La clase de los borelianos $E \subset X_1 \times X_2 \times X_3$ para los cuales la función es boreliana con $f = \mathbf{1}_E$ es una clase monótona (es cerrada por uniones crecientes y por diferencias propias, gracias a la convergencia monótona y a la linealidad) que contiene al π -sistema de los rectángulos; por el teorema de la clase monótona, contiene a todos los borelianos. El caso general se obtiene aproximando f por funciones simples.

Definimos entonces $\gamma(E) = \Lambda(\mathbf{1}_E)$ para E boreliano. Se verifica de inmediato que $\gamma(\emptyset) = 0$, que γ es σ -aditiva (convergencia monótona aplicada tres veces) y que $\gamma(X_1 \times X_2 \times X_3) = \int_{X_2} 1 d\mu_2 = 1$. Luego $\gamma \in \mathcal{P}(X_1 \times X_2 \times X_3)$, y por construcción $\int f d\gamma = \Lambda(f)$ para toda $f \geq 0$ boreliana.

Calculemos las marginales. Para $A_1 \subset X_1$, $A_2 \subset X_2$ borelianos,

$$(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)_\# \gamma(A_1 \times A_2) = \gamma(A_1 \times A_2 \times X_3) = \int_{A_2} \pi_{x_2}^{12}(A_1) \underbrace{\pi_{x_2}^{23}(X_3)}_{=1} d\mu_2(x_2) = \pi_{12}(A_1 \times A_2),$$

donde la última igualdad es (A.2.1) para la desintegración de π_{12} . Como los rectángulos generan los borelianos de $X_1 \times X_2$, $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)_\# \gamma = \pi_{12}$. El cálculo de $(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)_\# \gamma$ es idéntico. $\square$

OBSERVACIÓN A.3.2. La medida γ construida no es la única con las marginales prescritas: es la que hace a x_1 y x_3 condicionalmente independientes dado x_2 . Para la desigualdad triangular de W_p cualquier γ con esas marginales sirve, así que esta elección canónica es todo lo que necesitamos.

OBSERVACIÓN A.3.3 (Cuando uno de los planes es un mapa). Si $\pi_{23} = (\text{id}, T)_{\#}\mu_2$ está inducido por un mapa $T: X_2 \rightarrow X_3$, la desintegración es $\pi_{x_2}^{23} = \delta_{T(x_2)}$ (Proposición A.2.5) y (A.3.1) se reduce a

$$\gamma = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, T \circ \mathbf{p}_2)_{\#}\pi_{12},$$

lo cual puede verificarse directamente sin invocar el teorema de desintegración. Éste es el caso que aparece, por ejemplo, al componer un plan con el mapa de Brenier.

La consecuencia que usaremos es la siguiente.

COROLARIO A.3.4 (Composición de planes). *En las hipótesis del Lema A.3.1, la medida*

$$\pi_{13} := (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3)_{\#}\gamma$$

pertenece a $\Pi(\mu_1, \mu_3)$, y para toda función boreliana $g: X_1 \times X_3 \rightarrow [0, +\infty]$,

$$\int_{X_1 \times X_3} g d\pi_{13} = \int_{X_1 \times X_2 \times X_3} g(x_1, x_3) d\gamma(x_1, x_2, x_3).$$

DEMOSTRACIÓN. La primera marginal de π_{13} es $(\mathbf{p}_1)_{\#}\gamma = (\mathbf{p}_1)_{\#}((\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)_{\#}\gamma) = (\mathbf{p}_1)_{\#}\pi_{12} = \mu_1$, y análogamente la segunda es μ_3 . La fórmula integral es la definición de medida imagen. $\square$

En el Capítulo 10 aplicaremos este corolario con $X_i = \mathbb{R}^d$ y $g(x_1, x_3) = |x_1 - x_3|^p$: si π_{12} y π_{23} son planes óptimos entre μ_1, μ_2 y entre μ_2, μ_3 , el plan compuesto π_{13} es admisible entre μ_1 y μ_3 , y la desigualdad triangular en $L^p(\gamma)$ para $|x_1 - x_3| \leq |x_1 - x_2| + |x_2 - x_3|$ da la desigualdad triangular para W_p .

Ejercicios

EJERCICIO A.1 (Desintegraciones explícitas). Hallar la desintegración $\{\pi_x\}$ respecto de la primera marginal de las siguientes medidas en $\mathbb{R}^2$, y verificar la fórmula (A.2.2) en cada caso:

- (a) $\pi = \mu \otimes \nu$ (producto);
- (b) $\pi = 2\mathcal{L}^2|_{\{0 < y < x < 1\}}$ (uniforme en un triángulo);
- (c) $\pi = (\text{id}, T)_{\#}\mathcal{L}^1|_{[0,1]}$ con $T(x) = x^2$;
- (d) $\pi = \frac{1}{2}(\text{id}, T_1)_{\#}\mu + \frac{1}{2}(\text{id}, T_2)_{\#}\mu$ con $\mu = \mathcal{L}^1|_{[0,1]}$, $T_1(x) = x$, $T_2(x) = 1 - x$ (un plan que no es un mapa: ¿cuánto vale π_x ?).

EJERCICIO A.2 (Independencia y planes inducidos). Sea $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ con desintegración $\{\pi_x\}$.

- (a) Probar que $\pi = \mu \otimes \nu$ si y sólo si $\pi_x = \nu$ para μ -c.t.p. x .
- (b) Probar que π está inducido por un mapa si y sólo si π_x es una masa de Dirac para μ -c.t.p. x (Proposición A.2.5), y que en ese caso el mapa es $T(x) = \int y d\pi_x(y)$ (cuando ν tiene primer momento finito).
- (c) Para $\pi \in \Pi(\mu, \nu)$ arbitrario con $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$, sea $T(x) = \int y d\pi_x(y)$ el *baricentro condicional*. Probar que $\int |x - y|^2 d\pi \geq \int |x - T(x)|^2 d\mu$, con igualdad si y sólo si π está inducido por T . Concluir que si $T_{\#}\mu = \nu$, el plan $(\text{id}, T)_{\#}\mu$ es mejor que π : “promediar el destino no aumenta el costo cuadrático”. ¿Por qué esto no demuestra que los planes óptimos son mapas?

EJERCICIO A.3 (Asociatividad del pegado). Sean $\pi_{12} \in \Pi(\mu_1, \mu_2)$, $\pi_{23} \in \Pi(\mu_2, \mu_3)$ y $\pi_{34} \in \Pi(\mu_3, \mu_4)$.

- (a) Probar que pegar primero π_{12} con π_{23} y el resultado con π_{34} (a lo largo de la tercera coordenada) da la misma medida en $X_1 \times X_2 \times X_3 \times X_4$ que pegar primero π_{23} con π_{34} y luego con π_{12} .
- (b) Deducir la desigualdad triangular “iterada”

$$W_p(\mu_1, \mu_4) \leq W_p(\mu_1, \mu_2) + W_p(\mu_2, \mu_3) + W_p(\mu_3, \mu_4)$$

directamente a partir de un plan pegado, sin usar dos veces el Teorema 10.2.1.

- (c) Probar que si tres planos están inducidos por mapas T_1, T_2, T_3 , la medida pegada es $(\text{id}, T_1, T_2 \circ T_1, T_3 \circ T_2 \circ T_1)_\# \mu_1$.

EJERCICIO A.4 (Desintegración y transporte condicional). Sean $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ con marginales sobre la primera coordenada μ^1, ν^1 y desintegraciones $\mu = \mu_x \otimes \mu^1$, $\nu = \nu_x \otimes \nu^1$.

- (a) (“Knothe–Rosenblatt”). Supongamos μ^1 y todas las μ_x sin átomos. Sea T^1 el mapa monótono de μ^1 a ν^1 y, para cada x , T_x^2 el mapa monótono de μ_x a $\nu_{T^1(x)}$. Probar que $T(x, y) = (T^1(x), T_x^2(y))$ transporta μ en ν . (Es el *reordenamiento de Knothe–Rosenblatt*; no es óptimo para el costo cuadrático, pero es explícito y triangular.)
- (b) Probar que $W_2^2(\mu, \nu) \leq W_2^2(\mu^1, \nu^1) + \int W_2^2(\mu_x, \nu_{T^1(x)}) d\mu^1(x)$ y que, en general, la desigualdad es estricta.
- (c) Probar que si $\mu = \mu^1 \otimes \alpha$ y $\nu = \nu^1 \otimes \beta$ son productos, entonces $W_2^2(\mu, \nu) = W_2^2(\mu^1, \nu^1) + W_2^2(\alpha, \beta)$.

Apéndice B

El teorema de Fenchel–Rockafellar

En este apéndice demostramos el teorema de Fenchel–Rockafellar en la forma particular que utilizaremos en estas notas. El tratamiento general de la teoría de dualidad convexa puede consultarse en el clásico texto de Rockafellar [18].

A lo largo de esta sección, E denotará un espacio de Banach real y E^* su dual topológico.

B.1. Transformada de Legendre–Fenchel

Sea

$$F : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

Recordemos que F es convexa si

$$F(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda F(x) + (1 - \lambda)F(y)$$

para todo $x, y \in E$ y todo $\lambda \in [0, 1]$.

DEFINICIÓN B.1.1. La transformada de Legendre–Fenchel de F es la función

$$F^* : E^* \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\},$$

definida por

$$F^*(x^*) = \sup_{x \in E} \{\langle x^*, x \rangle - F(x)\}.$$

El siguiente resultado será utilizado repetidamente.

PROPOSICIÓN B.1.2. *Para toda función $F : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ se tiene*

$$F(x) + F^*(x^*) \geq \langle x^*, x \rangle,$$

para todo $x \in E$ y todo $x^ \in E^*$.*

DEMOSTRACIÓN. Por definición,

$$F^*(x^*) = \sup_{y \in E} (\langle x^*, y \rangle - F(y)).$$

Tomando $y = x$ obtenemos

$$F^*(x^*) \geq \langle x^*, x \rangle - F(x),$$

lo que equivale a la desigualdad buscada. □

Esta desigualdad recibe el nombre de desigualdad de Fenchel.

Necesitaremos además el concepto de epígrafo.

DEFINICIÓN B.1.3. El epígrafo de una función $F : E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el conjunto

$$\text{epi}(F) = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : F(x) \leq t\}.$$

Es bien sabido que F es convexa si y sólo si su epígrafo es un conjunto convexo.

El único resultado de análisis funcional que utilizaremos será el siguiente teorema de separación.

TEOREMA B.1.4 (Separación de Hahn–Banach). *Sean $A, B \subset E \times \mathbb{R}$ dos conjuntos convexos no vacíos.*

Supongamos que A es abierto y que

$$A \cap B = \emptyset.$$

Entonces existe un funcional lineal continuo no nulo

$$L : E \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

y un número real α tales que

$$L(a) < \alpha \leq L(b)$$

para todo $a \in A$ y todo $b \in B$.

Estamos ahora en condiciones de demostrar el resultado principal de este apéndice. Necesitaremos dos hechos elementales sobre conjuntos convexos.

LEMA B.1.5. *Sea $C \subset E \times \mathbb{R}$ un conjunto convexo.*

1. *Si $a \in \text{int}(C)$ y $b \in C$, entonces todo punto del segmento abierto $\{(1-s)b + sa : s \in (0, 1]\}$ pertenece a $\text{int}(C)$.*
2. *En consecuencia, si $\text{int}(C) \neq \emptyset$, entonces $C \subset \overline{\text{int}(C)}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $B(a, r) \subset C$ una bola centrada en a contenida en C , y sea $z = (1-s)b + sa$ con $s \in (0, 1]$. Si $|w| < sr$, entonces

$$z + w = (1-s)b + s\left(a + \frac{w}{s}\right),$$

con $a + w/s \in B(a, r) \subset C$ y $b \in C$; por convexidad, $z + w \in C$. Luego $B(z, sr) \subset C$ y z es interior. La segunda afirmación se obtiene haciendo $s \rightarrow 0^+$. $\square$

TEOREMA B.1.6 (Fenchel–Rockafellar). *Sean*

$$F, G : E \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

dos funciones convexas. Supongamos que existe $x_0 \in E$ tal que

$$F(x_0) < +\infty, \quad G(x_0) < +\infty,$$

y que además F es continua en x_0 . Entonces

$$\inf_{x \in E} (F(x) + G(x)) = \max_{x^* \in E^*} (-F^*(-x^*) - G^*(x^*)).$$

Antes de la demostración, observemos que la desigualdad

$$(B.1.1) \quad \sup_{x^* \in E^*} (-F^*(-x^*) - G^*(x^*)) \leq \inf_{x \in E} (F(x) + G(x))$$

es consecuencia inmediata de la desigualdad de Fenchel: para todo $x \in E$ y todo $x^* \in E^*$,

$$F(x) + F^*(-x^*) \geq \langle -x^*, x \rangle, \quad G(x) + G^*(x^*) \geq \langle x^*, x \rangle,$$

y sumando ambas, $-F^*(-x^*) - G^*(x^*) \leq F(x) + G(x)$.

El contenido del teorema consiste, por lo tanto, en demostrar la desigualdad recíproca y que el supremo se alcanza. Para ello construiremos un funcional separador mediante el teorema de Hahn-Banach.

DEMOSTRACIÓN. Denotemos

$$m = \inf_{x \in E} (F(x) + G(x)).$$

Como $F(x_0) + G(x_0) < +\infty$, se tiene $m < +\infty$. Si $m = -\infty$, la desigualdad (B.1.1) muestra que $-F^*(-x^*) - G^*(x^*) = -\infty$ para todo x^* , y no hay nada que probar. Supondremos entonces que $m \in \mathbb{R}$.

Paso 1: los dos conjuntos convexos. Consideremos

$$A = \text{int}(\text{epi}(F)), \quad B = \{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : t \leq m - G(x)\}.$$

Ambos son convexos: A es el interior del epígrafo de F , que es convexo, y B es la imagen del epígrafo de G por la aplicación afín $(x, t) \mapsto (x, m - t)$.

El conjunto A es abierto por definición, y es no vacío: como F es continua en x_0 , existe $r > 0$ tal que $F(x) \leq F(x_0) + 1$ para todo $x \in B(x_0, r)$, de modo que

$$(B.1.2) \quad B(x_0, r) \times (F(x_0) + 1, +\infty) \subset \text{epi}(F),$$

y ese conjunto es abierto, luego está contenido en A . El conjunto B es no vacío pues contiene a $(x_0, m - G(x_0))$.

Finalmente, $A \cap B = \emptyset$. En efecto, si $(x, t) \in A$ entonces $t > F(x)$: si fuera $t = F(x)$, los puntos $(x, t - \delta)$ con $\delta > 0$ no pertenecerían a $\text{epi}(F)$, y (x, t) no sería interior. Luego, si existiera $(x, t) \in A \cap B$, tendríamos

$$F(x) < t \leq m - G(x),$$

es decir, $F(x) + G(x) < m$, lo cual contradice la definición de m .

Paso 2: separación. Por el teorema de separación de Hahn-Banach, existen un funcional lineal continuo no nulo L sobre $E \times \mathbb{R}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$L(a) < \alpha \leq L(b) \quad \text{para todo } a \in A, b \in B.$$

Todo funcional lineal continuo sobre $E \times \mathbb{R}$ es de la forma

$$L(x, t) = \langle x^*, x \rangle + \lambda t$$

para ciertos $x^* \in E^*$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, no ambos nulos.

Paso 3: $\lambda < 0$. Por (B.1.2), $(x_0, t) \in A$ para todo $t > F(x_0) + 1$, y por lo tanto

$$\langle x^*, x_0 \rangle + \lambda t < \alpha \quad \text{para todo } t > F(x_0) + 1.$$

Haciendo $t \rightarrow +\infty$ resulta $\lambda \leq 0$.

Supongamos que $\lambda = 0$. Entonces $L(x, t) = \langle x^*, x \rangle$ y, por (B.1.2), $\langle x^*, x \rangle < \alpha$ para todo $x \in B(x_0, r)$. Por otra parte, $(x_0, m - G(x_0)) \in B$ da $\langle x^*, x_0 \rangle \geq \alpha$. Como $x_0 \in B(x_0, r)$, obtenemos $\alpha \leq \langle x^*, x_0 \rangle < \alpha$, absurdo. Luego $\lambda < 0$.

Dividiendo L y α por $|\lambda| > 0$, podemos suponer $\lambda = -1$. La separación se escribe entonces

$$(B.1.3) \quad \langle x^*, x \rangle - t < \alpha \quad \text{para todo } (x, t) \in A,$$

$$(B.1.4) \quad \langle x^*, x \rangle - t \geq \alpha \quad \text{para todo } (x, t) \in B.$$

Paso 4: cota para F^* . La desigualdad (B.1.3) vale en $A = \text{int}(\text{epi}(F))$; como $A \neq \emptyset$, el Lema B.1.5 da $\text{epi}(F) \subset \overline{A}$, y por continuidad de L la desigualdad se extiende (con $\leq$) a todo el epígrafo:

$$\langle x^*, x \rangle - t \leq \alpha \quad \text{para todo } (x, t) \text{ con } F(x) \leq t.$$

Tomando $t = F(x)$ para x con $F(x) < +\infty$ obtenemos

$$\langle x^*, x \rangle - F(x) \leq \alpha,$$

y esta desigualdad es trivial cuando $F(x) = +\infty$. Tomando supremo en x ,

$$(B.1.5) \quad F^*(x^*) \leq \alpha.$$

Paso 5: cota para G^* . Si $G(x) < +\infty$, entonces $(x, m - G(x)) \in B$, y (B.1.4) da

$$\langle x^*, x \rangle - m + G(x) \geq \alpha, \quad \text{es decir,} \quad \langle -x^*, x \rangle - G(x) \leq -\alpha - m.$$

Nuevamente la desigualdad es trivial si $G(x) = +\infty$. Tomando supremo en x ,

$$(B.1.6) \quad G^*(-x^*) \leq -\alpha - m.$$

Paso 6: conclusión. Sumando (B.1.5) y (B.1.6),

$$F^*(x^*) + G^*(-x^*) \leq -m, \quad \text{o sea,} \quad -F^*(x^*) - G^*(-x^*) \geq m.$$

Escribiendo $y^* = -x^*$, esto dice que

$$-F^*(-y^*) - G^*(y^*) \geq m = \inf_{x \in E} (F(x) + G(x)).$$

Junto con (B.1.1), concluimos que vale la igualdad y que el supremo se alcanza en y^* . Esto demuestra el teorema. $\square$

OBSERVACIÓN B.1.7. Obsérvese que la demostración no requiere ningún argumento de compacidad para obtener que el supremo es un máximo: el funcional y^* que lo realiza es directamente el que proporciona el teorema de separación. En la aplicación al problema de Kantorovich (Sección 4.4), esto es lo que garantiza la existencia de un plan óptimo como subproducto de la dualidad.

Ejercicios

EJERCICIO B.1 (Supremos de funciones convexas y semicontinuas). Sea E un espacio normado y $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ una familia de funciones $E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Probar que si todas las f_α son convexas, $f = \sup_\alpha f_\alpha$ es convexa, y que si todas son semicontinuas inferiormente, f lo es. Deducir que la transformada de Legendre–Fenchel F^* de cualquier función F es convexa y semicontinua inferiormente (para la topología débil-* de E^* , y en particular para la de la norma).

EJERCICIO B.2 (Ejemplos de transformadas). Calcular la transformada de Legendre–Fenchel de las siguientes funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$:

- (a) $f_p(x) = \frac{x^p}{p}$ para $x \geq 0$ y $+\infty$ para $x < 0$, con $p > 1$ (se obtiene $f_{p'}$ con $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, restringida a $y \geq 0$);
- (b) $f_\infty(x) = 0$ si $x \in [0, 1]$, $+\infty$ en otro caso; interpretar el resultado como límite $p \rightarrow \infty$ de (a);
- (c) $f(x) = |x|$, $f(x) = e^x$, $f(x) = -\log x$ ($x > 0$), $f(x) = x \log x$ ($x \geq 0$).

Verificar en cada caso que $f^{**} = f$.

EJERCICIO B.3 (Mínimos locales y globales). Sea $C \subset E$ convexo y $f: C \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexa y propia. Probar que todo mínimo local de f es global, y que el conjunto de minimizadores es convexo. Dar un ejemplo de una función convexa en $\mathbb{R}^2$ con infinitos minimizadores, y otro sin minimizadores pero con ínfimo finito.

EJERCICIO B.4 (Biconjugada). Sea $F: E \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ propia.

- (a) Probar que $F^{**} \leq F$ y que F^{**} es la mayor función convexa y semicontinua inferiormente que está por debajo de F .
- (b) Probar que si F es convexa, semicontinua inferiormente y propia, entonces $F^{**} = F$. *Sugerencia:* si $F^{**}(x_0) < F(x_0)$, separar el punto $(x_0, F^{**}(x_0))$ del epigrafo de F (cerrado y convexo en $E \times \mathbb{R}$) mediante Hahn–Banach, como en la demostración del Teorema B.1.6.
- (c) Calcular F^{**} para $F(x) = \min\{|x-1|, |x+1|\}$ en $\mathbb{R}$.

EJERCICIO B.5 (El caso de dimensión finita). Sea $K \subset \mathbb{R}^n$ convexo cerrado no vacío y χ_K su función indicatriz (0 en K , $+\infty$ fuera).

- (a) Probar que $\chi_K^*(y) = \sup_{x \in K} x \cdot y$ es la *función soporte* de K , y que $K = \{x : x \cdot y \leq \chi_K^*(y) \ \forall y\}$.
- (b) Aplicar el Teorema B.1.6 con $F = \chi_K$ y $G(x) = c \cdot x$ para reobtener la dualidad de programación lineal del Capítulo 3 (con $K = \{x \geq 0 : Ax = b\}$), identificando qué hipótesis del teorema corresponde a la factibilidad del primal.

Apéndice C

Factorización polar de matrices inversibles

La factorización polar es una descomposición clásica de las matrices que puede verse como el análogo matricial de la estructura que aparecerá más adelante para los mapas de transporte óptimo. En particular, permite escribir una transformación lineal invertible como la composición de una transformación ortogonal y una transformación que es el gradiente de una función convexa.

C.1. El teorema de factorización polar

Empecemos con un lema que será de gran utilidad en el resultado principal del apéndice.

LEMA C.1.1. *Sea $\Sigma \in \mathbb{R}^{d \times d}$ simétrica definida positiva. Entonces existe una única matriz simétrica definida positiva $\Sigma^{1/2}$ tal que $(\Sigma^{1/2})^2 = \Sigma$.*

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema espectral, $\Sigma = P\Lambda P^T$ con P ortogonal y $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$, $\lambda_i > 0$. La matriz $\Sigma^{1/2} = P\Lambda^{1/2}P^T$, con $\Lambda^{1/2} = \text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_d})$, es simétrica, definida positiva y verifica $(\Sigma^{1/2})^2 = P\Lambda P^T = \Sigma$.

Para la unicidad, sea R simétrica definida positiva con $R^2 = \Sigma$. Entonces R conmuta con $\Sigma = R^2$, de modo que R y Σ son simultáneamente diagonalizables: existe Q ortogonal con $Q^T \Sigma Q$ y $Q^T R Q$ diagonales. Si $Q^T R Q = \text{diag}(r_1, \dots, r_d)$ con $r_i > 0$, entonces $Q^T \Sigma Q = \text{diag}(r_1^2, \dots, r_d^2)$, y los r_i quedan determinados como las raíces positivas de los autovalores de Σ (con sus multiplicidades y autoespacios). Luego R coincide con la matriz construida en el párrafo anterior. $\square$

Ahora si, demostremos el teorema de factorización polar de matrices.

TEOREMA C.1.2 (Factorización polar). *Sea $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ una matriz inversible. Entonces existen una única matriz simétrica definida positiva S y una única matriz ortogonal U tales que*

$$A = SU.$$

Además,

$$S = (AA^T)^{1/2} \quad y \quad U = S^{-1}A.$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos la matriz

$$AA^T.$$

Esta matriz es simétrica y definida positiva. En efecto, para todo $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq 0$,

$$x^T AA^T x = |A^T x|^2 > 0,$$

pues A^T es inversible.

Por el Lema C.1.1, AA^T admite una única raíz cuadrada simétrica definida positiva. Denotemos dicha raíz por

$$S = (AA^T)^{1/2}.$$

En particular,

$$S^2 = AA^T$$

y S es inversible.

Definimos

$$U = S^{-1}A.$$

Entonces, por construcción,

$$A = SU.$$

Resta verificar que U es ortogonal. Como S es simétrica, también S^{-1} es simétrica, y por lo tanto

$$UU^T = S^{-1}AA^TS^{-1}.$$

Usando que $AA^T = S^2$, obtenemos

$$UU^T = S^{-1}S^2S^{-1} = I.$$

Luego U es ortogonal y queda demostrada la existencia de la factorización.

Para probar la unicidad, supongamos que

$$A = S_1U_1 = S_2U_2,$$

donde S_1, S_2 son simétricas definidas positivas y U_1, U_2 son ortogonales. Entonces

$$AA^T = S_1U_1U_1^TS_1 = S_1^2$$

y, de manera análoga,

$$AA^T = S_2^2.$$

Por lo tanto,

$$S_1^2 = S_2^2 = AA^T.$$

Como S_1 y S_2 son raíces cuadradas simétricas definidas positivas de AA^T , por la unicidad de dicha raíz se tiene

$$S_1 = S_2.$$

Finalmente,

$$U_1 = S_1^{-1}A = S_2^{-1}A = U_2.$$

Esto demuestra la unicidad de ambas matrices. □

OBSERVACIÓN C.1.3. La hipótesis de que A sea inversible es importante para obtener la unicidad de la parte ortogonal. Si A no es inversible, la matriz AA^T es solamente semidefinida positiva y la parte ortogonal de la factorización puede no quedar determinada de manera única.

Ejercicios

- EJERCICIO C.1 (Factorizaciones polares explícitas). (a) Calcular la factorización polar $A = SU$ de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y de una rotación compuesta con una dilatación, $A = \lambda R_\theta$.
- (b) Probar que $A = SU$ con $S = (AA^T)^{1/2}$ y que también existe una factorización $A = U'S'$ con $S' = (A^T A)^{1/2}$; relacionar S , S' , U y U' .
- (c) Probar que A es normal ($AA^T = A^T A$) si y sólo si S y U conmutan.

EJERCICIO C.2 (Matrices singulares). Sea $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ no necesariamente inversible.

- (a) Probar que existen S simétrica semidefinida positiva y U ortogonal con $A = SU$, y que $S = (AA^T)^{1/2}$ es única pero U no lo es en general. *Sugerencia:* aproximar A por matrices inversibles y usar la compacidad del grupo ortogonal.
- (b) Describir el conjunto de las U posibles cuando $A = 0$ y cuando A tiene rango $d - 1$.

EJERCICIO C.3 (Raíz cuadrada y monotonía). (a) Probar que la raíz cuadrada $M \mapsto M^{1/2}$ es continua en el cono de las matrices simétricas semidefinidas positivas.

- (b) Probar que si $0 \preceq M \preceq N$ (orden de Loewner) entonces $M^{1/2} \preceq N^{1/2}$, pero que $M \preceq N$ no implica $M^2 \preceq N^2$ (dar un ejemplo 2×2).
- (c) Probar que la fórmula del Lema C.1.1 para la solución de $A\Sigma_0 A = \Sigma_1$ define una función continua de (Σ_0, Σ_1) en el conjunto de pares de matrices definidas positivas.

Apéndice D

Subdiferencial de funciones convexas

En este apéndice reunimos las propiedades básicas de las funciones convexas en $\mathbb{R}^d$ que se usan en el Capítulo 9 para tratar el caso general del teorema de Brenier, cuando el potencial u no es de clase C^1 . El objeto central es el *subdiferencial*, que reemplaza al gradiente en los puntos donde u no es diferenciable. Trabajaremos únicamente con funciones convexas finitas en todo $\mathbb{R}^d$, que es el caso que aparece en las notas; el tratamiento general, para funciones a valores en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, puede consultarse en [18].

D.1. Funciones convexas son localmente Lipschitz

Recordemos que $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ es *convexa* si

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)z) \leq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(z) \quad \text{para todo } x, z \in \mathbb{R}^d, \lambda \in [0, 1].$$

LEMA D.1.1. *Sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Entonces u es localmente Lipschitz: para todo $R > 0$ existe $L = L(R)$ tal que*

$$|u(x) - u(z)| \leq L |x - z| \quad \text{para todo } x, z \in B(0, R).$$

En particular, u es continua.

DEMOSTRACIÓN. **Paso 1: u es acotada en bolas.** Sea $Q = [-2R, 2R]^d$ y sean $v_1, \dots, v_{2^d}$ sus vértices. Todo $x \in Q$ es combinación convexa de los vértices, $x = \sum_k \lambda_k v_k$, y por convexidad

$$u(x) \leq \sum_k \lambda_k u(v_k) \leq M := \max_k u(v_k).$$

Para la cota inferior, dado $x \in B(0, 2R)$ escribimos $0 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(-x)$, de donde $u(0) \leq \frac{1}{2}u(x) + \frac{1}{2}u(-x)$ y, como $-x \in Q$,

$$u(x) \geq 2u(0) - u(-x) \geq 2u(0) - M =: m.$$

Así, $m \leq u \leq M$ en $B(0, 2R)$.

Paso 2: estimación Lipschitz. Sean $x, z \in B(0, R)$ con $x \neq z$, y consideremos el punto

$$w = z + R \frac{z - x}{|z - x|},$$

que pertenece a $B(0, 2R)$ y está alineado con x y z , más allá de z . Entonces z es combinación convexa de x y w : con $\lambda = \frac{R}{R + |z - x|} \in (0, 1)$ se verifica $z = \lambda x + (1 - \lambda)w$, pues $\lambda x + (1 - \lambda)w = z + (1 - \lambda)R \frac{z - x}{|z - x|} - \lambda(z - x)$ y $(1 - \lambda)R = \lambda|z - x|$. Por convexidad, $u(z) \leq \lambda u(x) + (1 - \lambda)u(w)$, es decir,

$$u(z) - u(x) \leq (1 - \lambda)(u(w) - u(x)) \leq (1 - \lambda)(M - m).$$

Como $1 - \lambda = \frac{|z-x|}{R+|z-x|} \leq \frac{|z-x|}{R}$, obtenemos

$$u(z) - u(x) \leq \frac{M-m}{R} |z-x|.$$

Intercambiando los roles de x y z se obtiene la desigualdad opuesta, y el lema queda probado con $L = (M-m)/R$. $\square$

D.2. El subdiferencial

DEFINICIÓN D.2.1. Sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y sea $x \in \mathbb{R}^d$. El *subdiferencial* de u en x es el conjunto

$$\partial u(x) = \{y \in \mathbb{R}^d : u(z) \geq u(x) + y \cdot (z-x) \text{ para todo } z \in \mathbb{R}^d\}.$$

Los elementos de $\partial u(x)$ se llaman *subgradiientes* de u en x .

Geométricamente, $y \in \partial u(x)$ significa que el hiperplano afín $z \mapsto u(x) + y \cdot (z-x)$ pasa por $(x, u(x))$ y queda por debajo del gráfico de u : es un *hiperplano soporte* del epígrafo en ese punto. Si u es diferenciable en x , el plano tangente es uno de esos hiperplanos, y veremos que es el único. En un punto anguloso hay, en cambio, muchos: por ejemplo, para $u(x) = |x|$ en $\mathbb{R}$ se tiene $\partial u(0) = [-1, 1]$, mientras que $\partial u(x) = \{\operatorname{sgn} x\}$ si $x \neq 0$.

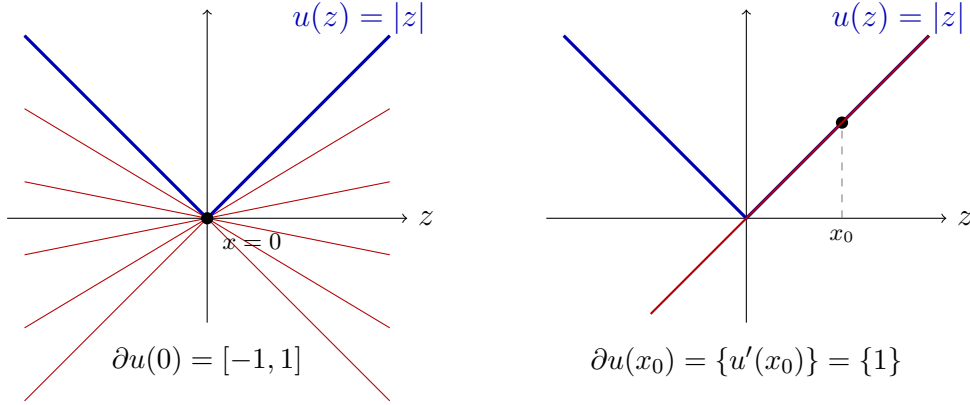


FIGURA D.1. El subdiferencial de $u(z) = |z|$. En el punto anguloso $x = 0$ (izquierda) hay infinitas rectas soporte, una por cada pendiente $y \in [-1, 1]$: todas pasan por el origen y quedan por debajo del gráfico. En un punto $x_0 \neq 0$ donde u es diferenciable (derecha) la única recta soporte es la tangente, y $\partial u(x_0)$ se reduce al singleton $\{u'(x_0)\}$ (Proposición D.4.1).

PROPOSICIÓN D.2.2. Sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Para todo $x \in \mathbb{R}^d$, el conjunto $\partial u(x)$ es no vacío, convexo y compacto.

DEMOSTRACIÓN. **Convexo y cerrado.** Para cada z fijo, la condición $u(z) \geq u(x) + y \cdot (z-x)$ define un semiespacio cerrado en la variable y ; $\partial u(x)$ es la intersección de todos ellos.

Acotado. Sea L la constante de Lipschitz de u en $B(x, 1)$, dada por el Lema D.1.1. Si $y \in \partial u(x)$ con $y \neq 0$, tomando $z = x + y/|y|$ obtenemos

$$|y| = y \cdot (z - x) \leq u(z) - u(x) \leq L |z - x| = L,$$

de modo que $\partial u(x) \subset \overline{B(0, L)}$.

No vacío. Consideremos en $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ el epígrafo $\text{epi}(u) = \{(z, t) : t \geq u(z)\}$, que es convexo. Como u es continua (Lema D.1.1), el conjunto $A = \text{int}(\text{epi}(u)) = \{(z, t) : t > u(z)\}$ es abierto, convexo y no vacío. El punto $b = (x, u(x))$ pertenece a $\text{epi}(u)$ pero no a A . Por el teorema de separación de Hahn–Banach (en la forma usada en el Apéndice B, aquí en dimensión finita), existen $(p, \lambda) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ no nulo y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$p \cdot z + \lambda t < \alpha \leq p \cdot x + \lambda u(x) \quad \text{para todo } (z, t) \in A.$$

Tomando $z = x$ y $t \rightarrow +\infty$ en la primera desigualdad resulta $\lambda \leq 0$. Si fuera $\lambda = 0$, tendríamos $p \cdot z < \alpha \leq p \cdot x$ para todo $z \in \mathbb{R}^d$ (pues $(z, t) \in A$ para t grande), lo cual es imposible para $z = x$. Luego $\lambda < 0$ y, dividiendo por $|\lambda|$, podemos suponer $\lambda = -1$:

$$p \cdot z - t < \alpha \leq p \cdot x - u(x) \quad \text{para todo } (z, t) \text{ con } t > u(z).$$

Haciendo $t \downarrow u(z)$ en la desigualdad de la izquierda obtenemos $p \cdot z - u(z) \leq \alpha \leq p \cdot x - u(x)$ para todo z , es decir,

$$u(z) \geq u(x) + p \cdot (z - x) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}^d.$$

Por lo tanto $p \in \partial u(x)$. □

OBSERVACIÓN D.2.3 (Monotonía del subdiferencial). Si $y_1 \in \partial u(x_1)$ e $y_2 \in \partial u(x_2)$, entonces

$$(y_1 - y_2) \cdot (x_1 - x_2) \geq 0.$$

En efecto, sumando las desigualdades $u(x_2) \geq u(x_1) + y_1 \cdot (x_2 - x_1)$ y $u(x_1) \geq u(x_2) + y_2 \cdot (x_1 - x_2)$ se obtiene $0 \geq (y_1 - y_2) \cdot (x_2 - x_1)$. En dimensión uno esto dice que el subdiferencial de una función convexa es una «relación no decreciente», lo que conecta la estructura del Capítulo 9 con la del Capítulo 8.

D.3. Subdiferencial y transformada de Legendre

Recordemos que la transformada de Legendre de u es $\bar{u}(y) = \sup_{z \in \mathbb{R}^d} \{z \cdot y - u(z)\}$, y que siempre vale la desigualdad de Fenchel–Young

$$u(x) + \bar{u}(y) \geq x \cdot y \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{R}^d.$$

El subdiferencial describe exactamente los pares en los que hay igualdad.

PROPOSICIÓN D.3.1. Sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexa y sean $x, y \in \mathbb{R}^d$. Entonces

$$y \in \partial u(x) \iff u(x) + \bar{u}(y) = x \cdot y.$$

En particular, $\bar{u}(y) < +\infty$ para todo $y \in \partial u(x)$.

DEMOSTRACIÓN. La condición $y \in \partial u(x)$ se reescribe, reordenando, como

$$z \cdot y - u(z) \leq x \cdot y - u(x) \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}^d,$$

es decir, como que el supremo que define $\bar{u}(y)$ se alcanza en $z = x$. Esto equivale a $\bar{u}(y) = x \cdot y - u(x)$, que es la identidad del enunciado. □

D.4. Subdiferencial y diferenciabilidad

PROPOSICIÓN D.4.1. *Sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Si u es diferenciable en x , entonces*

$$\partial u(x) = \{\nabla u(x)\}.$$

DEMOSTRACIÓN. Veamos primero que $\nabla u(x) \in \partial u(x)$. Dado $z \in \mathbb{R}^d$, la convexidad da, para $\lambda \in (0, 1]$,

$$u(x + \lambda(z - x)) \leq (1 - \lambda)u(x) + \lambda u(z), \text{ o sea, } \frac{u(x + \lambda(z - x)) - u(x)}{\lambda} \leq u(z) - u(x).$$

Haciendo $\lambda \rightarrow 0^+$, la diferenciabilidad de u en x da $\nabla u(x) \cdot (z - x) \leq u(z) - u(x)$, que es la definición de subgradiente.

Veamos ahora que no hay otros. Sea $y \in \partial u(x)$ y sea $h \in \mathbb{R}^d$. Aplicando la definición con $z = x + h$ y usando la expansión de primer orden $u(x + h) = u(x) + \nabla u(x) \cdot h + o(|h|)$, obtenemos

$$(\nabla u(x) - y) \cdot h + o(|h|) \geq 0.$$

Reemplazando h por sh con $s > 0$, dividiendo por s y haciendo $s \rightarrow 0^+$, resulta $(\nabla u(x) - y) \cdot h \geq 0$ para todo h ; aplicado a h y a $-h$, esto da $(\nabla u(x) - y) \cdot h = 0$ para todo h , luego $y = \nabla u(x)$. $\square$

OBSERVACIÓN D.4.2. Vale también la recíproca: si $\partial u(x)$ se reduce a un único punto, entonces u es diferenciable en x . La demostración requiere analizar las derivadas direccionales de u y puede verse en [18, Theorem 25.1]. No la necesitaremos.

D.5. El teorema de Rademacher

El último ingrediente es un resultado profundo de teoría de la medida geométrica, que enunciamos sin demostración.

TEOREMA D.5.1 (Rademacher). *Sea $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^m$ localmente Lipschitz. Entonces f es diferenciable en $\mathcal{L}^d$ -casi todo punto de $\mathbb{R}^d$.*

La demostración puede consultarse en [9, Theorem 3.2]. Combinando este teorema con los resultados anteriores obtenemos la conclusión que se usa en el Capítulo 9.

COROLARIO D.5.2. *Sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexa. Entonces existe un conjunto boreliano $D \subset \mathbb{R}^d$ con $\mathcal{L}^d(\mathbb{R}^d \setminus D) = 0$ tal que u es diferenciable en todo punto de D y*

$$\partial u(x) = \{\nabla u(x)\} \quad \text{para todo } x \in D.$$

Además, la aplicación $x \mapsto \nabla u(x)$ es boreliana en D .

En consecuencia, si $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ satisface $\mu \ll \mathcal{L}^d$, entonces para μ -c.t.p. x el subdiferencial $\partial u(x)$ es el singleton $\{\nabla u(x)\}$.

DEMOSTRACIÓN. Por el Lema D.1.1, u es localmente Lipschitz, y por el Teorema D.5.1 es diferenciable fuera de un conjunto $\mathcal{L}^d$ -nulo. Que el conjunto D de puntos de diferenciabilidad de una función continua es boreliano, y que ∇u es boreliana en D , es un hecho estándar: D se describe mediante condiciones numerables sobre los cocientes incrementales de u en puntos racionales, y ∇u es límite puntual de tales cocientes; véase [9, Section 3.1]. La identidad $\partial u(x) = \{\nabla u(x)\}$ en D es la Proposición D.4.1.

Finalmente, si $\mu \ll \mathcal{L}^d$, entonces $\mu(\mathbb{R}^d \setminus D) = 0$, pues $\mathbb{R}^d \setminus D$ es $\mathcal{L}^d$ -nulo. $\square$

OBSERVACIÓN D.5.3. Reunamos lo que estos resultados aportan a la demostración del teorema de Brenier (Observación 9.1.5). La condición de saturación $u(x) + \bar{u}(y) = x \cdot y$ equivale, por la Proposición D.3.1, a $y \in \partial u(x)$. Sin más información, $\partial u(x)$ puede contener muchos puntos y la saturación no determina y . Pero si $\mu \ll \mathcal{L}^d$, el Corolario D.5.2 garantiza que para μ -c.t.p. x el subdiferencial es el singleton $\{\nabla u(x)\}$, de modo que la única elección posible es $y = \nabla u(x)$. Este es el punto exacto donde la continuidad absoluta de μ resulta indispensable.

Ejercicios

EJERCICIO D.1 (Un ejemplo completo). Sea $u(x) = |x|$ en $\mathbb{R}$. Calcular $\partial u(x)$ para todo x , la transformada de Legendre $\bar{u}$ y $\partial \bar{u}(y)$ para todo y del dominio de $\bar{u}$, y verificar en este ejemplo la Proposición D.3.1 y la relación $y \in \partial u(x) \iff x \in \partial \bar{u}(y)$. Repetir para $u(x) = \max\{x^2, 2|x|\}$ (que tiene tres puntos de no diferenciabilidad) y para $u(x) = |x| + x^2$ (que aparece en el Capítulo 8).

EJERCICIO D.2 (Subdiferencial y conjugación). Sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexa.

- Probar que $y \in \partial u(x)$ implica $x \in \partial \bar{u}(y)$ (Proposición D.3.1 y $\bar{\bar{u}} = u$, Ejercicio B.4).
- Probar la recíproca: si $x \in \partial \bar{u}(y)$ entonces $y \in \partial u(x)$. ¿Dónde se usa que u es convexa y semicontinua inferiormente?
- Deducir que $\partial \bar{u} = (\partial u)^{-1}$ como grafos: $\{(y, x) : x \in \partial \bar{u}(y)\} = \{(y, x) : y \in \partial u(x)\}$. En el caso del Teorema 9.1.3, interpretar esto como “ $\nabla \bar{u}$ es el mapa óptimo inverso”.

- EJERCICIO D.3 (Monotonía y monotonía cíclica). (a) Probar que el grafo $\Gamma = \{(x, y) : y \in \partial u(x)\}$ de una función convexa es *cíclicamente monótono*: para toda familia finita $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k) \in \Gamma$ y toda permutación σ , $\sum_i y_i \cdot x_i \geq \sum_i y_i \cdot x_{\sigma(i)}$. Compararlo con la c -monotonía cíclica del Capítulo 8 para $c(x, y) = |x - y|^2$.
- (b) (Rockafellar.) Recíprocamente, probar que si $\Gamma \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ es cíclicamente monótono, existe u convexa con $\Gamma \subset \{(x, y) : y \in \partial u(x)\}$. *Sugerencia*: fijar $(x_0, y_0) \in \Gamma$ y definir

$$u(x) = \sup \{y_k \cdot (x - x_k) + y_{k-1} \cdot (x_k - x_{k-1}) + \dots + y_0 \cdot (x_1 - x_0)\},$$

donde el supremo es sobre todas las cadenas finitas $(x_1, y_1), \dots, (x_k, y_k)$ en Γ ; la monotonía cíclica garantiza $u(x_0) = 0$ (finita).

- (c) Deducir que el soporte de un plan óptimo para el costo cuadrático está contenido en el grafo del subdiferencial de una función convexa, sin usar potenciales de Kantorovich. (Éste es el camino original de Brenier y de Knott–Smith.)

EJERCICIO D.4 (Diferenciabilidad). Sea $u: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ convexa.

- (a) Probar la recíproca de la Proposición D.4.1: si $\partial u(x) = \{y\}$ es un único punto, entonces u es diferenciable en x con $\nabla u(x) = y$. *Sugerencia*: si no, existen $h_k \rightarrow 0$ con $\frac{u(x+h_k) - u(x) - y \cdot h_k}{|h_k|} \geq \delta > 0$; tomar $y_k \in \partial u(x + h_k)$, usar la cota local de Lipschitz para extraer una subsucesión convergente $y_k \rightarrow y'$ y probar $y' \in \partial u(x)$, $y' \neq y$.

- (b) Dar un ejemplo de $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, *no* convexa, con $\partial f(0)$ (definido por la misma desigualdad) reducido a un punto pero f no derivable en 0.
- (c) Deducir del Teorema D.5.1 y de (a) que el conjunto de puntos donde una función convexa tiene subdiferencial no unitario tiene medida de Lebesgue cero, y dar un ejemplo en el que ese conjunto sea denso.

Apéndice E

Cuadernos de cómputo

Seis cuadernos de Python (*notebooks*) acompañan estas notas. No forman parte de la teoría: su propósito es que el lector pueda ver los objetos del curso —planes, potenciales, mapas monótonos, geodésicas, baricentros— en ejemplos concretos, y comprobar numéricamente lo que los teoremas afirman. Cada cuaderno termina con una lista de ejercicios computacionales, que son los mismos que aparecen en la subsección “Ejercicios computacionales” del capítulo correspondiente. Los cuadernos están pensados para ejecutarse en Google Colab, que no requiere instalar nada; también pueden ejecutarse en cualquier instalación local de Jupyter.

Cuaderno	Capítulos	Ejercicios
<i>Monge y Kantorovich</i>	1, 2	2.9–2.13
<i>Dualidad</i>	3–6	6.6–6.10
<i>OT en dimensión uno</i>	8	8.8–8.12
<i>Distancias de Wasserstein</i>	10	10.12–10.16
<i>Baricentros de Wasserstein</i>	12	12.10–12.13
<i>Transporte entrópico y Sinkhorn</i>	13	13.8–13.12

Los cuadernos, junto con estas notas y las guías de ejercicios, se encuentran en el repositorio del curso,

<https://github.com/jfbonder/transporte-optimo>

desde donde pueden abrirse directamente en Colab.

La biblioteca POT

Todos los cuadernos usan *POT: Python Optimal Transport* [10], que se instala con `pip install pot` (en Colab, la primera celda de cada cuaderno lo hace) y se importa como `ot`. Las funciones que aparecen en los cuadernos son pocas: `ot.dist` construye la matriz de costos entre dos nubes de puntos; `ot.emd` y `ot.emd2` resuelven exactamente el problema discreto de Kantorovich (devuelven el plan y el costo óptimo, respectivamente; con la opción `log=True` también los potenciales duales); `ot.sinkhorn` y `ot.sinkhorn2` resuelven el problema entrópico del Capítulo 13; `ot.lp.barycenter` y `ot.bregman.barycenter` calculan baricentros exactos y entrópicos. Los problemas duales del cuaderno *Dualidad* se resuelven con `scipy.optimize.linprog`.

Dos convenciones de POT conviene tener presentes al leer el código, porque difieren de las de estas notas.

- (I) `ot.dist(X, Y)` devuelve por defecto la distancia euclídea *al cuadrado*, $|x_i - y_j|^2$; para el costo $|x - y|$ hay que pedir `metric='euclidean'`. Elevar al cuadrado la salida de `ot.dist` produce el costo $|x - y|^4$, un error fácil de cometer.

- (II) El término de regularización de `ot.sinkhorn` es, salvo constantes, la entropía negativa de π multiplicada por ε , es decir $\varepsilon \sum_{i,j} \pi_{ij} \log \pi_{ij}$, y no $\varepsilon \text{KL}(\pi | a \otimes b)$ como en la Definición 13.1.3. Sobre $\Pi(a, b)$ ambos funcionales difieren en la constante

$$\varepsilon \left(\sum_i a_i \log a_i + \sum_j b_j \log b_j \right),$$

pues las marginales están fijas: el minimizador es el mismo π^ε y los potenciales duales coinciden, pero el valor que devuelve `ot.sinkhorn2` no es $\text{OT}_\varepsilon(a, b)$. En los cuadernos, cuando importa el valor, se calcula $\langle C, \pi^\varepsilon \rangle + \varepsilon \text{KL}(\pi^\varepsilon | a \otimes b)$ directamente a partir del plan.

Los cuadernos citan los resultados de las notas por su nombre (“el teorema de optimalidad del mapa monótono”, “la fórmula del área”) y no por su número, para que sigan siendo legibles si la numeración cambia.

Bibliografia

- [1] Martial Agueh and Guillaume Carlier. Barycenters in the Wasserstein space. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 43(2):904–924, 2011.
- [2] Pedro C. Álvarez-Esteban, Eustasio del Barrio, Juan A. Cuesta-Albertos, and Carlos Matrán. A fixed-point approach to barycenters in Wasserstein space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 441(2):744–762, 2016.
- [3] Luigi Ambrosio, Nicola Gigli, and Giuseppe Savaré. *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*. Lectures in Mathematics ETH Zürich. Birkhäuser, Basel, 2 edition, 2008.
- [4] Jean-David Benamou, Guillaume Carlier, Marco Cuturi, Luca Nenna, and Gabriel Peyré. Iterative Bregman projections for regularized transportation problems. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 37(2):A1111–A1138, 2015.
- [5] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. Wiley Series in Probability and Statistics. John Wiley & Sons, New York, 2 edition, 1999.
- [6] Yann Brenier. Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 44(4):375–417, 1991.
- [7] Roberto Cominetti and Jaime San Martín. Asymptotic analysis of the exponential penalty trajectory in linear programming. *Mathematical Programming*, 67:169–187, 1994.
- [8] Marco Cuturi. Sinkhorn distances: lightspeed computation of optimal transport. In *Advances in Neural Information Processing Systems 26 (NIPS 2013)*, pages 2292–2300, 2013.
- [9] Lawrence C. Evans and Ronald F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, revised edition edition, 2015.
- [10] Rémi Flamary, Nicolas Courty, Alexandre Gramfort, Mokhtar Z. Alaya, Aurélie Boisbunon, Stanislas Chambon, Laetitia Chapel, Adrien Corenflos, Kilian Fatras, Nemo Fournier, Léo Gautheron, Nathalie T.H. Gayraud, Hicham Janati, Alain Rakotomamonjy, Ievgen Redko, Antoine Rollet, Antony Schutz, Vivien Seguy, Danica J. Sutherland, Romain Tavenard, Alexander Tong, and Titouan Vayer. POT: Python Optimal Transport. *Journal of Machine Learning Research*, 22(78):1–8, 2021.
- [11] Joel Franklin and Jens Lorenz. On the scaling of multidimensional matrices. *Linear Algebra and its Applications*, 114/115:717–735, 1989.
- [12] W. Gangbo and R. J. McCann. The geometry of optimal transportation. *Acta Math.*, 177:113–161, 1996.
- [13] Richard J. Gardner. The Brunn–Minkowski inequality. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 39(3):355–405, 2002.
- [14] Christian Léonard. A survey of the Schrödinger problem and some of its connections with optimal transport. *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series A*, 34(4):1533–1574, 2014.
- [15] R. J. McCann. A convexity principle for interacting gases. *Adv. Math.*, 128:153–179, 1997.
- [16] Victor M. Panaretos and Yoav Zemel. *An Invitation to Statistics in Wasserstein Space*. Springer-Briefs in Probability and Mathematical Statistics. Springer, Cham, 2020.
- [17] Gabriel Peyré and Marco Cuturi. Computational optimal transport: with applications to data science. *Foundations and Trends in Machine Learning*, 11(5-6):355–607, 2019.
- [18] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex Analysis*, volume 28 of *Princeton Mathematical Series*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.
- [19] Filippo Santambrogio. *Optimal Transport for Applied Mathematicians: Calculus of Variations, PDEs, and Modeling*, volume 87 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*. Birkhäuser, Cham, 2015.

- [20] Robert J. Vanderbei. *Linear Programming: Foundations and Extensions*, volume 285 of *International Series in Operations Research & Management Science*. Springer, 5 edition, 2020.
- [21] Cédric Villani. *Topics in Optimal Transportation*, volume 58 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.