

TEORÍA DE TRANSPORTE ÓPTIMO

PRÁCTICA 3: UN BREVE REPASO DE DUALIDAD EN PROGRAMACIÓN LINEAL

Los ejercicios son los de la sección de ejercicios del Capítulo 3 de las notas del curso, con la misma numeración; las referencias a teoremas, proposiciones y secciones remiten a las notas (<https://github.com/jfbonder/transporte-optimo>).

- Ejercicio 3.1** (Duales de distintas formas). (a) Escribir el problema dual de $\min\{c^T x : Ax \geq b, x \geq 0\}$ y el de $\min\{c^T x : Ax = b\}$ (sin restricción de signo), reduciéndolos primero a la forma estándar $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ mediante variables de holgura y la descomposición $x = x^+ - x^-$.
- (b) Probar que el dual del dual es el primal.
- (c) Dar un ejemplo en $\mathbb{R}$ (una variable) en el que el primal no sea factible y el dual no sea acotado, y otro en el que ninguno de los dos sea factible. ¿Contradicen estos ejemplos el teorema de dualidad fuerte?

Ejercicio 3.2 (Holgura complementaria). Sean x factible para el primal $\min\{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$ e y factible para su dual $\max\{b^T y : A^T y \leq c\}$.

- (a) Probar que $c^T x - b^T y = x^T (c - A^T y)$ y que ambos son óptimos si y sólo si $x_j (c - A^T y)_j = 0$ para todo j .
- (b) Traducirlo al problema de transporte discreto de la Sección 3.4: π y (φ, ψ) factibles son ambos óptimos si y sólo si

$$\pi_{ij} > 0 \implies \varphi_i + \psi_j = c_{ij}.$$

Ésta es la versión discreta de la *condición de saturación* que reaparecerá en los Capítulos 5 y 6.

Ejercicio 3.3 (Un problema 2×2 a mano). Sean $a = (0,4, 0,6)$, $b = (0,5, 0,5)$ y $c = (\frac{1}{2}, \frac{3}{1})$.

- (a) Describir $\Pi(a, b)$ como un segmento (tiene un solo grado de libertad) y hallar el plan óptimo y el costo óptimo.
- (b) Resolver el problema dual y verificar la dualidad fuerte y la holgura complementaria del Ejercicio 3.2.
- (c) Probar que el par óptimo (φ, ψ) es único salvo la transformación $(\varphi + s, \psi - s)$, $s \in \mathbb{R}$, e interpretar esta invariancia.

Ejercicio 3.4 (Vértices del politopo de transporte). Sean $a \in \mathbb{R}^N$, $b \in \mathbb{R}^M$ con entradas positivas y $\sum a_i = \sum b_j = 1$, y $\Pi(a, b)$ el politopo de planes discretos.

- (a) Probar que $\Pi(a, b)$ es un politopo compacto y convexo de dimensión $(N - 1)(M - 1)$.
- (b) Probar que todo punto extremal π de $\Pi(a, b)$ tiene a lo sumo $N + M - 1$ entradas positivas. *Sugerencia:* el grafo bipartito con aristas $\{(i, j) : \pi_{ij} > 0\}$ no puede contener ciclos (si los contiene, perturbar como en el Ejercicio 1.11), y un bosque con $N + M$ vértices tiene a lo sumo $N + M - 1$ aristas.
- (c) Deducir que el problema de transporte discreto siempre admite un plan óptimo con a lo sumo $N + M - 1$ entradas positivas. (Esta cota se usa en el Capítulo 13 para contrastar con el plan entrópico, que tiene todas sus entradas positivas.)

Ejercicio 3.5 (El problema de asignación). Sean $N = M$ y $a = b = \frac{1}{N}(1, \dots, 1)$.

- (a) Probar, usando que un programa lineal alcanza su mínimo en un vértice y el teorema de Birkhoff (Ejercicio 1.11), que

$$\min_{\pi \in \Pi(a, b)} \sum_{ij} c_{ij} \pi_{ij} = \frac{1}{N} \min_{\sigma \in S_N} \sum_i c_{i\sigma(i)}.$$

Es decir: para pesos uniformes, el problema de Kantorovich discreto coincide con el problema de Monge (una asignación óptima), aunque el primero tiene N^2 variables continuas y el segundo $N!$ candidatos.

- (b) Escribir el dual del problema de asignación y probar que una permutación σ es óptima si y sólo si existen $\varphi, \psi \in \mathbb{R}^N$ con $\varphi_i + \psi_j \leq c_{ij}$ para todo i, j y $\varphi_i + \psi_{\sigma(i)} = c_{i\sigma(i)}$ para todo i . Interpretar φ_i y ψ_j como precios (problema de asignación de Koopmans–Beckmann).
- (c) Para $c_{ij} = |x_i - y_j|^2$ con $x_1 < \dots < x_N$ e $y_1 < \dots < y_N$ en $\mathbb{R}$, probar directamente que $\sigma = \text{id}$ es óptima (intercambiar dos asignaciones cruzadas no aumenta el costo). Éste es el germen del Capítulo 8.